Minta felmérő dolgozat - megoldás

1. *Ábrázolja a következő függvényt függvény transzformációk segítségével!*

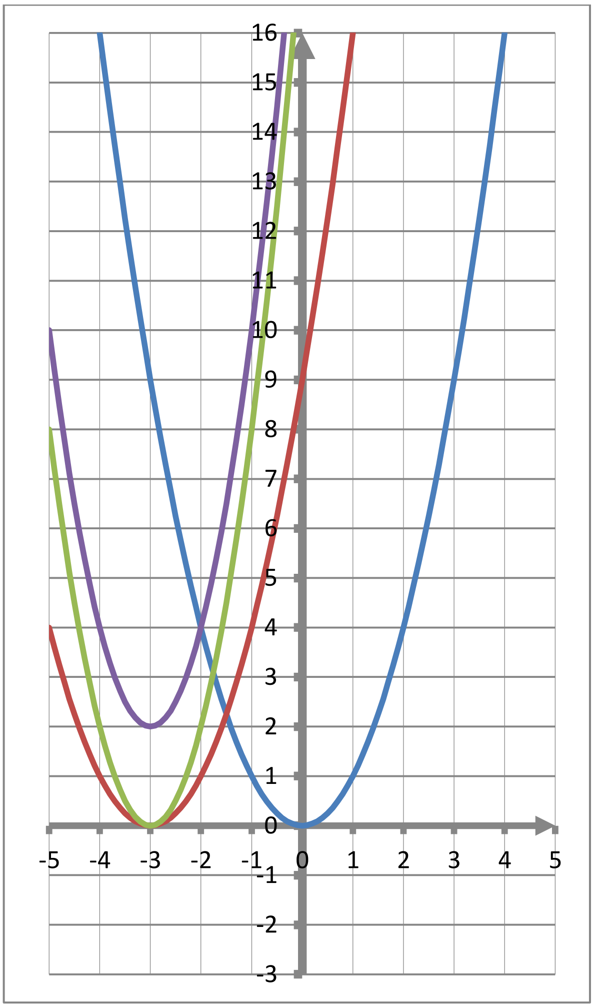
$$f(x) = 2x^2 + 12x + 20$$

Megoldás:

Először is át kell alakítani, hogy tudjuk ábrázolni.

$$2x^2 + 12x + 20 = 2[x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 + 1] = 2(x+3)^2 + 2 \cdot 1 = 2(x+3)^2 + 2$$

Ábrázolás: (transzformációk segítségével)



- **Az x^2 függvény felrajzolásával kezdjük. (Az ábrán kékkel jelölve.)**
- **Ezt az x tengelyen a negatív irányba 3-mal eltolva kapjuk az $(x+3)^2$függvényt. (Az ábrán zölddel jelölve.)**
- **Ezt az y tengely irányában kétszeresére nyújtva kapjuk a $2(x+3)^2$ függvényt. (Az ábrán vörössel jelölve.)**
- **Ezt az y tengelyen a pozitív irányba 2-vel eltolva kapjuk a $2(x+3)^2 + 2$ függvényt. (Az ábrán lilával jelölve.)**

2. *Adja meg az alábbi függvény természetes értelmezési tartományát!*

$$f(x) = \frac{log_2(x^2 - 6x - 7)}{(x-1)^2}$$

Megoldás:

- Csak pozitív számnak lehet a logaritmusát venni, így az $x^2 - 6x - 7 > 0$. A megoldó képletbe behelyettesítés segítségével kapjuk a gyöktényezős alakot:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 + 4 \cdot 7}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2} = \begin{matrix} -1 \\ \\ 7 \end{matrix}$$

  Vagyis $x^2 - 6x - 7 = (x+1)(x-7)$. A szorzat értéke akkor pozitív, ha a két tag előjele megegyezik, vagyis ha $\boldsymbol{x > 7}$ **vagy** $\boldsymbol{x < -1}$**.**

- Egy tört nevezőjében nem lehet 0. Vagyis $(x-1)^2 \neq 0$, azaz $x - 1 \neq 0$. Vagyis

$$\boldsymbol{x \neq 1}$$

A két vastagon szedett feltételnek egyszerre kell teljesülnie, azaz az értelmezési tartomány:

$$D_f \ = \ ]-\infty; \boldsymbol{-1}[\ \cup \ ]\boldsymbol{7}; \infty[$$

3. *Adja meg a következő törtkifejezés értelmezési tartományát, majd egyszerűsítse a törtet, amennyire lehetséges!*

$$\frac{-x^2 + 5x - 6}{x^2 - 8x + 15}$$

Megoldás:

Először az értelmezési tartományt adjuk meg! A tört nevezője nem lehet 0. Azaz

$$x^2 - 8x + 15 \neq 0$$

A másodfokú egyenlet megoldó képletébe behelyettesítve megkapjuk, hogy x milyen értékeket nem vehet fel, és egyből fel tudjuk majd írni a nevező gyöktényezős alakját.

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 15}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{matrix} 5 \\ \\ 3 \end{matrix}$$

Vagyis az értelmezési tartomány: $\boldsymbol{D} = \mathbf{R} \backslash \{\mathbf{3}, \mathbf{5}\}$**.** A nevező gyöktényezős alakja pedig $x^2 - 8x + 15 = (x-5)(x-3)$.

Írjuk fel a tört számlálójának gyöktényezős alakjához újra a másodfokú egyenlet megoldó képletét!

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{(-2)} = \frac{-5 \pm 1}{(-2)} = \begin{matrix} 3 \\ \\ 2 \end{matrix}$$

Tehát a számláló gyöktényezős alakja: $-x^2 + 5x - 6 = (-1)(x-3)(x-2)$.
Ezt felhasználva az eredeti tört a következőképpen alakul:

$$\frac{-x^2 + 5x - 6}{x^2 - 8x + 15} = \frac{(-1)(x-3)(x-2)}{(x-5)(x-3)} = \frac{(-1)(x-2)}{(x-5)} = \frac{2-x}{x-5}$$

4. Adott az $a_n = \frac{3^{2n}}{3n+4}$ *sorozat. Vizsgálja meg az* $a_{n+1} - a_n$ *különbség előjelét!*

$(n \in \mathrm{N}^{+})$

Megoldás:

$a_n = \frac{3^{2n}}{3n+4}$

$a_{n+1} = \frac{3^{2(n+1)}}{3(n+1)+4} = \frac{3^{2n+2}}{3n+3+4} = \frac{9 \cdot 3^{2n}}{3n+7}$

$$\frac{3^{2n+2}}{3n+7} - \frac{3^{2n}}{3n+4} = \frac{(9 \cdot 3^{2n})(3n+4)}{(3n+7)(3n+4)} - \frac{(3^{2n})(3n+7)}{(3n+7)(3n+4)} =$$

$$= \frac{9 \cdot 3^{2n} \cdot 3n + 4 \cdot 9 \cdot 3^{2n} - 3^{2n} \cdot 3n - 7 \cdot 3^{2n}}{9n^2 + 21n + 12n + 28} = \frac{3n \cdot 3^{2n} \cdot (9-1) + 3^{2n} \cdot (4 \cdot 9 - 7)}{9n^2 + 33n + 28} =$$

$$= \frac{3n \cdot 3^{2n} \cdot 8 + 3^{2n} \cdot 25}{9n^2 + 33n + 28}$$

A kérdés, hogy ez mikor pozitív és mikor negatív.

A számlálóban 3^{2n} és annak pozitív számszorosa szerepel. Ezért a számláló minden pozitív n esetén pozitív lesz. Vagyis az előjelet a nevező dönti el.

A nevező egy másodfokú kifejezés. A megoldó képlettel felírhatjuk a gyöktényezős alakot, melyből látszik majd, hogy mely n-re lesz pozitív és mely n-re lesz negatív a kifejezés.

$$\frac{-33 \pm \sqrt{33^2 - 4 \cdot 28 \cdot 9}}{2 \cdot 9} = \frac{-33 \pm \sqrt{81}}{18} = \frac{-33 \pm 9}{18} = \begin{array}{l} \frac{-24}{18} = \frac{-4}{3} \\ \frac{-42}{18} = \frac{-7}{3} \end{array}$$

Vagyis csak a $\frac{-7}{3} < n < \frac{-4}{3}$ esetben lesz negatív az $a_n - a_{n+1}$ előjele. Mivel $n \in \mathbf{N}^{+}$ a különbség értéke a sorozat minden elemére pozitív lesz.

5. *Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!*

$$\left|\frac{6n^2+10}{n^2+5}-6\right|<10^{-4}$$

Megoldás:

Az abszolút érték jel eltüntetésével kezdjük.

$$-10^{-4}<\frac{6n^2+10}{n^2+5}-6<10^{-4}$$

A két egyenlőtlenséget megoldva megkapjuk a keresett n értékeket.

$$-10^{-4}<\frac{6n^2+10}{n^2+5}-6$$
$$-10^{-4}+6<\frac{6n^2+10}{n^2+5}$$
$$(-10^{-4}+6)(n^2+5)<6n^2+10$$
$$(-10^{-4}+6)n^2+(-10^{-4}+6)\cdot 5<6n^2+10$$
$$(-10^{-4}+6)n^2-6n^2<10-(-10^{-4}+6)\cdot 5$$
$$n^2(-10^{-4}+6-6)<10+5\cdot 10^{-4}-30$$
$$n^2(-10^{-4})<20+5\cdot 10^{-4}$$
$$n^2>\frac{20+5\cdot 10^{-4}}{-10^{-4}}$$

Bármely n-re teljesül, hiszen a bal oldal egy pozitív szám, a jobb oldal pedig negatív.

$$10^{-4}>\frac{6n^2+10}{n^2+5}-6$$
$$10^{-4}+6>\frac{6n^2+10}{n^2+5}$$
$$(10^{-4}+6)(n^2+5)>6n^2+10$$
$$(10^{-4}+6)n^2+(10^{-4}+6)\cdot 5>6n^2+10$$
$$(10^{-4}+6)n^2-6n^2>10-(10^{-4}+6)\cdot 5$$
$$n^2(10^{-4}+6-6)>10-5\cdot 10^{-4}-30$$
$$n^2(10^{-4})>20-5\cdot 10^{-4}$$
$$n^2>\frac{20-5\cdot 10^{-4}}{10^{-4}}$$
$$\boldsymbol{n>\sqrt{\frac{20-5\cdot 10^{-4}}{10^{-4}}}}$$

Ahhoz hogy az eredeti egyenlőtlenség teljesüljön mindkét ágnak teljesülnie kell, azaz:

$$\boldsymbol{n>\sqrt{\frac{20-5\cdot 10^{-4}}{10^{-4}}}}$$

Vagyis

$$n>\sqrt{\frac{20-5\cdot 10^{-4}}{10^{-4}}}=\sqrt{\frac{20}{10^{-4}}-\frac{5\cdot 10^{-4}}{10^{-4}}}=\sqrt{20\cdot 10^4-5}=\sqrt{199995}=141{,}42$$

Tehát ha $n\geq\sqrt{199995}$, akkor az egyenlőség teljesül.