BME Bevezető Matematika
BMETE90AX40

MŰEGYETEM 1782

Czirók Emese

Függvény differenciálás összefoglalás

Differenciálszámítás:

Def: **Differenciahányados**:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \frac{\textit{függvényérték változása}}{\textit{független változó megváltozása}} = \textit{húr iránytangense}$$

Ha Δx egyre kisebb, vagyis tart 0-hoz, akkor a húrok átmennek érintőbe.

Def:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \textit{érintő iránytangense}$$

Az f deriválható a-ban, ha a fenti határérték létezik, és véges. Ekkor $f'(a) \in \mathbf{R}$ az f függvény a pontbeli **deriváltja (differenciálhányadosa)**.

(Jobb és baloldali derivált ugyanígy definiálható, jobb és baloldali határérték felhasználásával.)

Tétel: $f'(x)$ akkor és csak akkor létezik, ha a jobb és baloldali deriváltak léteznek, és ezek egyenlők.

Def: Az f **függvény deriválható (differenciálható)** egy intervallumon, a minden pontjában differenciálható.

Tétel: Ha egy függvény differenciálható egy pontban, akkor ebben a pontban folytonos is. (Tehát a deriválhatóság „erősebb". Pl: $|x|$ függvény a 0 pontban folytonos, de nem deriválható.)

Tétel: Az f függvény x_0 pontbeli érintő egyenesének egyenlete: $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

Deriválási szabályok:

Tétel: Ha $f(x)$ és $g(x)$ differenciálható az x pontban, akkor $f \pm g$, cf $(c \in \mathbf{R})$, és $f \cdot g$ is differenciálható, illetve ha $g(x) \neq 0$ esetén $\frac{1}{g}$ és $\frac{f}{g}$ is differenciálható valamint:

$$\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\big(cf(x)\big)' = cf'(x)$$

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

Tétel: Nevezetes függvények deriváltjai:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (a \in \boldsymbol{R})$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(\log_{\mathrm{a}} x)' = \frac{1}{x \ln a}$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$
$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$
$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$
$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$
$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

L'Hospital szabály:

Tétel (**L'Hospital szabály**): Legyen f és g differenciálható az a egy pontozott környezetében, úgy hogy itt $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ és $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$. Ekkor, ha $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Tétel (**L'Hospital szabály**): Legyen f és g differenciálható az a egy pontozott környezetében, úgy hogy itt $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ és $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$. Ekkor, ha $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Függvényvizsgálat:

Def: Az f függvény az x_0-ban **lokálisan növekvő**, ha x_0-nak van egy kis környezete, melyre igaz, hogy ha $x_0 > x$, akkor $f(x_0) > f(x)$, és ha $x_0 < x$, akkor $f(x_0) < f(x)$.

Def: Az f függvény az x_0-ban **lokálisan csökkenő**, ha x_0-nak van egy kis környezete, melyre igaz, hogy ha $x_0 > x$, akkor $f(x_0) < f(x)$, és ha $x_0 < x$, akkor $f(x_0) > f(x)$.

Tétel: Ha f differenciálható x_0-ban és

1. f lokálisan nő x_0 -ban, akkor $f'(x_0) \geq 0$
2. $f'(x_0) > 0$, akkor f lokálisan nő x_0-ban.

Tétel: Differenciálható függvény esetén lokális szélsőérték létezésének

1. Szükséges feltétele: $f'(x_0) = 0$
2. Elégséges feltétele:
   a. $f'(x) = 0$ és $f'(x)$ előjelet vált x_0 -ban
   b. $f'(x) = 0$ és $f''^{(x_0)} \neq 0$. ($f''(x_0) > 0$ esetén lokális minimum, $f''(x_0) < 0$ esetén lokális maximum van)

Def: Az f függvény x_0-ban **konvex**, ha x_0-nak van egy kis környezete, melyre igaz, hogy a környezet bármely két függvénypontját összekötve a húr a függvénygörbe felett halad.

Def: Az f függvény x_0-ban **konkáv**, ha x_0-nak van egy kis környezete, melyre igaz, hogy a környezet bármely két függvénypontját összekötve a húr a függvénygörbe alatt halad.

Tétel: Kétszer differenciálható függvény esetén inflexiós pont szélsőérték létezésének

1. Szükséges feltétele: $f''(x) = 0$
2. Elégséges feltétele:
   a. $f''(x_0) = 0$ és f'' előjelet vált x_0-ban
   b. $f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$

Mintapéldák:

1. A definíció segítségével határozzuk meg a derivált függvény értékét az adott pontban!

   a. $f(x) = x^2$, $f'(5) = ?$

   A derivált értéke az a pontban megkapható a $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ határértékkel. Tehát:

$$\lim_{x \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 5^2}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x - 5} = \lim_{x \to 5} x + 5 = 5 + 5 = 10$$

   Tehát $f'(5) = 10$.

   b. $f(x) = \sqrt{4x+5}$, $f'(1) = ?$

   A derivált értéke az a pontban megkapható a $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ határértékkel. Tehát:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{4x+5} - \sqrt{4 \cdot 1 + 5}}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{4x+5} - 3}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{4x+5} - 3\right)\left(\sqrt{4x+5} + 3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{4x+5} + 3\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{4x+5} - 3\right)\left(\sqrt{4x+5} + 3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{4x+5} + 3\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(4x+5) - 3^2}{(x-1)\left(\sqrt{4x+5} + 3\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{4x - 4}{(x-1)\left(\sqrt{4x+5} + 3\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{4(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{4x+5} + 3\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{4}{\sqrt{4x+5} + 3} = \lim_{x \to 1} \frac{4}{\sqrt{4 \cdot 1 + 5} + 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

   Tehát $f'(1) = \frac{2}{3}$.

2. Milyen a és b esetén lesz a függvény a teljes számegyenesen differenciálható?

a. $f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x^2+1} & ha \;\; x < 1 \\ ax - b & ha \;\; különben \end{cases}$

Első körben vizsgáljuk a folytonosságot, hiszen a differenciálhatóság feltétele a folytonosság. A két darab külön-külön folytonos, hiszen a racionális törtfüggvény folytonos, kivéve a nevező nullhelyén (ami itt nincs), illetve az egyszerű polinom függvény is folytonos.
Tehát csak az „illesztési pontban” kell vizsgálnunk a határértéket és függvényértéket:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} ax - b = a - b$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{6}{x^2+1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$f(1) = a \cdot 1 - b = a - b$$

A folytonossághoz az szükséges, hogy a fenti három megegyezzen. Tehát $a - b = 3$.
Nézzük ez után a deriváltat:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{0 \cdot (x^2+1) - 6 \cdot (2x+0)}{(x^2+1)^2} = \frac{-12x}{(x^2+1)^2} & ha \;\; x < 1 \\ a - 0 = a & ha \;\; x \geq 1 \end{cases}$$

Tehát

$$f'_-(1) = \frac{-12 \cdot 1}{(1+1)^2} = -6$$

$$f'_+(1) = a$$

Ahhoz, hogy a függvény deriválható legyen a bal és jobboldali deriváltnak meg kell egyeznie. Tehát $a = -6$. Ez alapján pedig $-6 - b = 3$, vagyis $b = -9$.

b. $f(x) = \begin{cases} \cos(-\pi \cdot x) & ha -1 \leq x \leq 1 \\ ax^6 - b\,x^4 + 2x^2 & ha \;\; különben \end{cases}$

Legelőször is alakítsuk kicsit át a függvényünket: $f(x) = \begin{cases} ax^6 - bx^4 + 2x^2 & ha \;\; x < -1 \\ \cos(-\pi \cdot x) & ha -1 \leq x \leq 1 \\ ax^6 - bx^4 + 2x^2 & ha \;\; x > 1 \end{cases}$

Ez után vizsgáljuk a folytonosságot, hiszen a differenciálhatóság feltétele a folytonosság. A három darab külön-külön folytonos, hiszen a polinom és *cos* függvények folytonosak. Tehát csak az „illesztési pontban” kell vizsgálnunk a határértéket és függvényértéket.
Először -1 pontban:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \cos(-\pi \cdot x) = \cos\big((-\pi) \cdot (-1)\big) = \cos \pi = -1$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} ax^6 - bx^4 + 2x^2 = a \cdot (-1)^6 - b \cdot (-1)^4 + 2 \cdot (-1)^2 = a - b + 2$$

$$f(-1) = a \cdot (-1)^6 - b \cdot (-1)^4 + 2 \cdot (-1)^2 = a - b + 2$$

A folytonossághoz az szükséges, hogy a fenti három megegyezzen. Tehát $a - b + 2 = -1$.
Nézzük az 1 pontban:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \cos(-\pi \cdot x) = \cos\big((-\pi) \cdot (1)\big) = \cos(-\pi) = -1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ax^6 - bx^4 + 2x^2 = a \cdot (1)^6 - b \cdot (1)^4 + 2 \cdot (1)^2 = a - b + 2$$

$$f(1) = a \cdot (1)^6 - b \cdot (1)^4 + 2 \cdot (1)^2 = a - b + 2$$

A folytonossághoz az szükséges, hogy a fenti három megegyezzen. Tehát $a - b + 2 = -1$.
(Vizsgálhattuk volna egyszerre a +1 és -1 pontbeli határértékeket, mert a függvény mindkét ága páros függvény.)

Nézzük ez után a deriváltat:

$$f'(x) = \begin{cases} a \cdot 6x^5 - b \cdot 4x^3 + 2 \cdot 2x = 6ax^5 - 4bx^3 + 4x & ha\ x < -1 \\ \sin(-\pi x) \cdot (-\pi) = -\pi \sin(-\pi x) & ha\ -1 \le x \le 1 \\ 6ax^5 - 4bx^3 + 4x & ha\ x < -1 \end{cases}$$

Tehát

$$f'_-(-1) = 6 \cdot a \cdot (-1)^5 - 4b(-1)^3 + 4 \cdot (-1) = -6a + 4b - 4$$
$$f'_+(-1) = -\pi \sin\big((-\pi) \cdot (-1)\big) = -\pi \cdot \sin(\pi) = -\pi \cdot 0 = 0$$

Ennek a kettőnek meg kell egyeznie, ahhoz, hogy az eredeti függvény deriválható legyen, tehát $-6a + 4b - 4 = 0$.

Ugyanígy vizsgáljuk a deriváltat a +1 pontban.

$$f'_-(1) = 6 \cdot a \cdot (1)^5 - 4b(1)^3 + 4 \cdot (1) = 6a - 4b + 4$$
$$f'_+(1) = -\pi \sin\big((-\pi) \cdot 1\big) = -\pi \cdot \sin(\pi) = -\pi \cdot 0 = 0$$

Ezeknek szintén meg kell egyeznie. Eszerint $6a - 4b + 4 = 0$. (Ez pont ugyanaz, mint az előző feltétel, hiszen csak egy -1 szorzó a különbség.)

Tehát a és b-re a következő feltételeket kaptuk:

$a - b + 2 = -1$ és $6a - 4b + 4 = 0$

Ezeket kicsit átalakítva kapjuk a következő egyenletrendszert: $3a - 3b = -9$ és $3a - 2b = -2$.

Ezeket ha ezeket kivonjuk egymásból kapjuk, hogy $-b = -7$. Tehát $b = 7$, és eszerint $a - 7 = -3$, tehát $a = 4$.

3. Deriválási szabályok segítségével deriváljuk a következő függvényeket!

a. $\left(\frac{x^5+3x^3-4x+1}{x^2-1}\right)'$

$$\left(\frac{x^5 + 3x^3 - 4x + 1}{x^2 - 1}\right)' \overset{*}{=} \frac{(x^5 + 3x^3 - 4x + 1)' \cdot (x^2 - 1) - (x^5 + 3x^3 - 4x + 1) \cdot (x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} \overset{**}{=}$$
$$= \frac{((x^5)' + (3x^3)' - (4x)' + (1)') \cdot (x^2 - 1) - (x^5 + 3x^3 - 4x + 1) \cdot \big((x^2)' - (1)'\big)}{(x^2 - 1)^2} \overset{***}{=}$$
$$= \frac{(5x^4 + 3 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 1 \cdot x^0 + 0) \cdot (x^2 - 1) - (x^5 + 3x^3 - 4x + 1) \cdot (2x - 0)}{(x^2 - 1)^2}$$
$$= \frac{(5x^4 + 9x^2 - 4) \cdot (x^2 - 1) - (x^5 + 3x^3 - 4x + 1) \cdot (2x)}{(x^2 - 1)^2}$$
$$= \frac{5x^6 + 9x^4 - 4x^2 - 5x^4 - 9x^2 + 4 - 2x^6 - 6x^4 + 8x^2 - 2x}{(x^2 - 1)^2}$$
$$= \frac{3x^6 - 2x^4 - 4x^2 - 5x^2 - 2x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

Magyarázat a lépésekhez:

*: Alkalmaztuk a tört deriváltra vonatkozó szabályt: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

**: Mindkét deriválásnál alkalmaztuk az összeg deriváltra vonatkozó szabályt: $(f + g)' = f' + g'$

***: Az összes eset $(x^n)'$ típusú. Illetve egy helyen alkalmaztuk, hogy : $(cf)' = cf'$

b. $\left((x^4+2)\cdot\sqrt{1+2x^3}\right)'$

$$
\begin{aligned}
\left((x^4+2)\cdot\sqrt{1+2x^3}\right)' &\stackrel{*}{=} (x^4+2)'\cdot\sqrt{1+2x^3}+(x^4+2)\cdot\left(\sqrt{1+2x^3}\right)' \stackrel{**}{=}\\
&= \left((x^4)'+(2)'\right)\cdot\sqrt{1+2x^3}+(x^4+2)\cdot\left((1+2x^3)^{1/2}\right)' \stackrel{***}{=}\\
&= (4x^3+0)\cdot\sqrt{1+2x^3}+(x^4+2)\cdot\left((1+2x^3)^{1/2}\right)' \stackrel{****}{=}\\
&= (4x^3)\cdot\sqrt{1+2x^3}+(x^4+2)\cdot\left(\frac{1}{2}(1+2x^3)^{-1/2}\cdot(1+2x^3)'\right) \stackrel{*****}{=}\\
&= (4x^3)\cdot\sqrt{1+2x^3}+(x^4+2)\cdot\left(\frac{1}{2}(1+2x^3)^{-1/2}\cdot\left((1)'+(2x^3)'\right)\right) \stackrel{******}{=}\\
&= (4x^3)\cdot\sqrt{1+2x^3}+(x^4+2)\cdot\left(\frac{1}{2}(1+2x^3)^{-1/2}\cdot(0+2\cdot 3x^2)\right)\\
&= 4x^3\cdot\sqrt{1+2x^3}+(x^4+2)\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{1+2x^3}}\cdot(6x^2)\right)\\
&= 4x^3\cdot\sqrt{1+2x^3}+\frac{(x^4+2)\cdot 6x^2}{2\cdot\sqrt{1+2x^3}} = 4x^3\cdot\sqrt{1+2x^3}+\frac{3x^6+6x^2}{\sqrt{1+2x^3}}
\end{aligned}
$$

Magyarázat a lépésekhez:

*: Alkalmaztuk a szorzat deriváltra vonatkozó szabályt: $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$

**: Az (x^4+2) tagra alkalmaztuk az összeg deriváltjára vonatkozó szabályt $(f+g)'=f'+g'$, valamint a gyököt felírtuk $\frac{1}{2}$-dik hatványként.

***: Az előbbi összeg tagjai mind $(x^n)'$ típusúak.

****: Áttértünk az $\left((1+2x^3)^{1/2}\right)'$ tényezőhöz. Ez egy összetett függvény. A külső függvény az $x^{1/2}$, a belső pedig $1+2x^3$. Ezekre alkalmaztuk: $\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$.

***** A megmaradt derivált egy összeg deriváltja, erre megint alkalmaztuk az összeg deriválási szabályát. ****** A tagok deriváltját pedig már könnyen kapjuk az x^n deriváltja alapján.

c. $\left(\frac{7\operatorname{ctg}x}{2-5\cos x-\frac{4x}{\pi}}\right)'$

$$
\left(\frac{7\operatorname{ctg}x}{2-5\cos x-\frac{4x}{\pi}}\right)' \stackrel{*}{=} \frac{(7\operatorname{ctg}x)'\cdot\left(2-5\cdot\cos x-\frac{4x}{\pi}\right)-(7\operatorname{ctg}x)\cdot\left(2-5\cdot\cos x-\frac{4x}{\pi}\right)'}{\left(2-5\cdot\cos x-\frac{4x}{\pi}\right)^2} \stackrel{**}{=}
$$

$$
=\frac{7\cdot(\operatorname{ctg}x)'\cdot\left(2-5\cdot\cos x-\frac{4x}{\pi}\right)-(7\operatorname{ctg}x)\cdot\left((2)'-(5\cdot\cos x)'-\left(\frac{4x}{\pi}\right)'\right)}{\left(2-5\cdot\cos x-\frac{4x}{\pi}\right)^2} \stackrel{***}{=}
$$

$$
=\frac{7\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}\cdot\left(2-5\cdot\cos x-\frac{4x}{\pi}\right)-(7\operatorname{ctg}x)\cdot\left(0-5\cdot(\cos x)'-\frac{4}{\pi}\cdot(x)'\right)}{\left(2-5\cdot\cos x-\frac{4x}{\pi}\right)^2} \stackrel{****}{=}
$$

$$
=\frac{7\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}\cdot\left(2-5\cdot\cos x-\frac{4x}{\pi}\right)-(7\operatorname{ctg}x)\cdot\left(0-5\cdot(-\sin x)-\frac{4}{\pi}\cdot 1\right)}{\left(2-5\cdot\cos x-\frac{4x}{\pi}\right)^2} =
$$

$$=\frac{\frac{7\cdot\left(2-5\cdot\cos x-\frac{4x}{\pi}\right)}{\sin^2 x}-\frac{(7\operatorname{ctg} x)}{\left(5\cdot(-\sin x)-\frac{4}{\pi}\right)}}{\left(2-5\cdot\cos x-\frac{4x}{\pi}\right)^2}=\frac{\frac{14-35\cdot\cos x-\frac{28x}{\pi}}{\sin^2 x}+\frac{(7\operatorname{ctg} x)}{\left(5\cdot\sin x-\frac{4}{\pi}\right)}}{\left(2-5\cdot\cos x-\frac{4x}{\pi}\right)^2}$$

Magyarázat a lépésekhez:

*: Alkalmaztuk a tört deriváltra vonatkozó szabályt: $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$

**: Az első deriválásnál alkalmazzuk, hogy: $(cf)'=cf'$, a másodiknál pedig az összeg deriváltjára vonatkozó szabályt: : $(f+g)'=f'+g'$

***: Ez után használjuk az alap határértékeket, illetve újra a $(cf)'=cf'$ egyenlőséget.

****: Újfent az alap határértékeket használhatjuk.

d. $(x^x)'$

$$(x^x)'\overset{*}{\triangleq}\left(e^{\ln x^x}\right)'\overset{**}{\triangleq}\left(e^{x\ln x}\right)'\overset{***}{\triangleq}e^{x\ln x}\cdot(x\cdot\ln x)'\overset{****}{\triangleq}e^{x\ln x}\cdot((x)'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)')\overset{*****}{\triangleq}$$
$$=e^{x\ln x}\cdot\left(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)$$

Magyarázat a lépésekhez:

*: x^x típusú deriválásnál érdemes alkalmazni, hogy valamely a esetén $e^{\ln a}=a$.

**: Logaritmus azonosság szerint $\ln x^\alpha=\alpha\cdot\ln x$

***: Ez után deriváljuk a közvetett függvényt. A külső függvény e^x a belső pedig $x\cdot\ln x$. Ezekre alkalmazzuk a $\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$

****: Használjuk a szorzat határértékét: $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$

4. Határozza meg az $f(x)=\frac{4+3x}{(\ln x)^3+1}$ függvény grafikonját az $x_0=1$ pont felett érintő egyenes egyenletét!

a. $f(x)=\frac{4+3x}{(\ln x)^3+1}$ $\quad x_0=1$

Az $f(x)$ függvény x_0 ponthoz tartozó érintőjének egyenlete $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.
Ez jelen esetben

$$x_0=1 \qquad f(1)=\frac{4+3\cdot 1}{(\ln 1)^3+1}=\frac{7}{2}$$

$$f'(x)=\frac{(4+3x)'\cdot((\ln x)^3+1)-(4+3x)\cdot((\ln x)^3+1)'}{((\ln x)^3+1)^2}$$
$$=\frac{(0+3)\cdot((\ln x)^3+1)-(4+3x)\cdot\left(3\cdot(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}+0\right)}{((\ln x)^3+1)^2}$$
$$=\frac{3\cdot((\ln x)^3+1)-(4+3x)\cdot\left(3\cdot(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}\right)}{((\ln x)^3+1)^2}$$
$$f'(1)=\frac{3\cdot((\ln 1)^3+1)-(4+3\cdot 1)\cdot\left(3\cdot(\ln 1)^2\cdot\frac{1}{1}\right)}{((\ln 1)^3+1)^2}=$$
$$=\frac{3\cdot((0)^3+1)-(4+3)\cdot(3\cdot(0)^2\cdot 1)}{((0)^3+1)^2}=\frac{3\cdot 1-7\cdot 0}{1^2}=3$$

Tehát az egyenes egyenlete: $y=3\cdot(x-1)+\frac{7}{2}$. Ezt átalakítva: $2y-3x=4$.

b. $f(x) = 1 + \sin(x \cdot e^{2x+1}) \qquad x_0 = 0$

$$x_0 = 0$$
$$f(0) = 1 + \sin(0 \cdot e^{2\cdot 0+1}) = 1 + \sin 0 = 1$$
$$f'(x) = (1 + \sin(x \cdot e^{2x+1}))' = 0 + (\sin(x \cdot e^{2x+1}))' = 0 + \cos(x \cdot e^{2x+1}) \cdot (x \cdot e^{2x+1})'$$
$$= \cos(x \cdot e^{2x+1}) \cdot [1 \cdot e^{2x+1} + x \cdot e^{2x+1} \cdot (2x+1)']$$
$$= \cos(x \cdot e^{2x+1}) \cdot [e^{2x+1} + xe^{2x+1} \cdot 2]$$
$$f'(0) = \cos(0 \cdot e^{2\cdot 0+1}) \cdot [e^{2\cdot 0+1} + 0 \cdot e^{2\cdot 0+1} \cdot 2] = \cos(0 \cdot e) \cdot [e + 0] = 1 \cdot e$$

Eszerint az érintő egyenlete: $y = e \cdot (x - 0) + 1$. Ezt átalítva: $y = ex + 1$.

5. Adjuk meg a következő határértékeket!

a. $\lim_{x\to 2} \frac{(1-e^{x-2})\cdot\cos(\pi\cdot x)}{x^2-4}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(1-e^{x-2})\cdot\cos(\pi\cdot x)}{x^2-4} \overset{\frac{0}{0}\,L'H}{\triangleq} \lim_{x\to 2} \frac{(0-(e^{x-2})\cdot 1)\cdot\cos(\pi\cdot x) + (1-e^{x-2})\cdot\sin(\pi\cdot x)\cdot\pi}{2x-0}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2}\cdot\cos(\pi\cdot x) + (1-e^{x-2})\cdot\sin(\pi\cdot x)\cdot\pi}{2x}$$
$$= \frac{e^0\cdot\cos(2\pi) + (1-e^0)\cdot\sin(2\pi)\cdot\pi}{2\cdot 2} = \frac{1\cdot 1 + (1-1)\cdot 0\cdot\pi}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}$$

b. $\lim_{x\to 1} (\ln x)\cdot\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$

$$\lim_{x\to 1} (\ln x)\cdot\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) = \lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \overset{\frac{0}{0}\,L'H}{\triangleq} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + (\ln x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\frac{\pi}{2}}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\frac{1}{1}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \ln 1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{1}{1}\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot\frac{\pi}{2}}{-1\cdot\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

c. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x(e^x-1)} - \frac{x}{x(e^x-1)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\right) \overset{\frac{0}{0}\,L'H}{\triangleq}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x-0-1}{1\cdot(e^x-1) + x\cdot(e^x-0)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{e^x-1+x\cdot e^x} \overset{\frac{0}{0}\,L'H}{\triangleq} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x-0+1\cdot e^x + x\cdot e^x}$$
$$= \frac{e^0}{e^0-0+e^0+0\cdot e^0} = \frac{1}{2}$$

d. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}\,L'H}{\triangleq} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{e^x}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}\,L'H}{\triangleq} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{e^x}\right) = \frac{2}{\infty} = 0$$

e. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{7x}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{7x}\right) \overset{\frac{0}{0}\,L'H}{\triangleq} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(5x)\cdot 5}{7}\right) = 1\cdot\frac{5}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{7x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}\cdot\frac{5x}{7x} = 1\cdot\frac{5}{7} = \frac{5}{7}$$

6. Adja meg azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, melyeken f szigorúan monoton nő, illetve szigorún monoton csökken!

a. $f(x)=\frac{x-2}{(x+2)^2}$

A függvény folytonos, kivéve ott, ahol a nevező nulla, vagyis az $x=-2$ pontban. (Itt ugye a függvény nincs értelmezve.)

Szélsőértéke ott lehet, ahol a függvény deriváltja 0.

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x-2)-2(x+2)\cdot 1}{(x+2)^4}=\frac{x-2-2x-4}{(x+2)^4}=\frac{-x-6}{(x+2)^4}$$

Ez akkor lehet 0, ha a számláló 0, vagyis, ha $x=-6$. Tehát szélsőértéke LEHET az $x=-6$ pontban, de ezt ellenőriznünk kell. Kétféleképpen tehetjük ezt meg. Vagy a második derivált előjelét vizsgáljuk az $x=-6$ pontban, vagy pedig azt, hogy az első derivált előjelet vált-e az $x=-6$ pontban.

Vizsgáljuk a második deriváltat:

$$f''(x)=\frac{-1\cdot(x+2)^4-(-x-6)\cdot 4\cdot(x+2)^3\cdot 1}{(x+2)^4}=\frac{-(x+2)^4+4\cdot(x+6)(x+2)^3}{(x+2)^4}$$

$$f''(-6)=\frac{-(-6+2)^4+4\cdot(-6+6)(-6+2)^3}{(-6+2)^4}=\frac{-(-4)^4+4\cdot(0)(-4)^3}{(-4)^4}=\frac{-256+0}{256}=-1$$

Mivel ez negatív, az eredeti függvénynek x=-6 helyen lokális maximuma van.

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha az vizsgáljuk, hogy milyen az előjele az első deriváltnak. A nevező minden esetben pozitív, így csak a számlálót kell vizsgálnunk. Ha x kisebb, mint -6, akkor $-x-6$ pozitív. (tehát ott az eredeti függvény ott nő.) Ha pedig x nagyobb, mint -6, akkor $-x-6$ negatív. (tehát az eredeti függvény csökken.) Vagyis az f' valóban előjelet vált, tehát lokális szélsőértéke van. Mivel előtte nő, utána csökken, a szélsőérték maximum.

7. Határozza meg a következő függvény inflexiós pontját!

a. $f(x)=x^3-2x$

Szélsőérték ott lehet, ahol a második derivált értéke nulla.

$$f'(x)=3x^2-2$$
$$f''(x)=6x$$

Tehát szélsőérték ott lehet, ahol $6x=0$, vagyis $x=0$-nál. Azt, hogy itt valóban inflexiós pont van-e úgy tudjuk eldönteni, hogy vizsgáljuk a harmadik deriváltat, ami $f'''(x)=6$. Ez természetesen bármilyen x esetén pozitív, tehát tényleg inflexiós pont van.

(Másképp vizsgálhattuk volna a második derivált $6x$ előjelét. Ez $x=0$ -ban valóban előjelet vált, tehát tényleg inflexiós pont van.)