

## Komplex számok összefoglaló

### Definíció:

#### Algebrai alak

Bármely komplex szám egyértelműen felírható

$$z = a + bi$$

alakban, ahol  $a, b \in \mathbf{R}$ , és  $i = \sqrt{-1}$ .

$a = \text{Re}(z)$  valós rész

$b = \text{Im}(z)$  képzetes/imaginárius rész

#### Trigonometrikus alak:

Bármely nullától különböző komplex szám egyértelműen felírható

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

alakban, ahol  $r \geq 0$ ,  $-\pi \leq \varphi < \pi$ .

$r = |z|$  a komplex szám hossza

$\varphi = \arg(z)$  a komplex szám argumentuma.

### A két alak közti átirás:

#### Algebrai--> Trigonometrikus

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{b}{a}\right) & \text{ha } a > 0 \\ \pi + \arctg\left(\frac{b}{a}\right) & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

Megj:  $\arctg(\varphi) = \tan^{-1} \varphi$ . Számológépen ez van!

#### Algebrai--> Trigonometrikus

$$a = r \cdot \cos \varphi$$

$$b = r \cdot \sin \varphi$$

Def:  $\bar{z}$  (a  $z$  komplex szám **konjugáltja**) az a komplex szám, melyre:  $\text{Re}(z) = \text{Re}(\bar{z})$  és  $\text{Im}(z) = -\text{Im}(\bar{z})$ .  
 Vagyis  $a + bi$  konjugáltja  $a - bi$ .

Hasznos tudni:  $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$

### Műveletek komplex számokkal:

$i$  hatványok  $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i \dots$

általánosan:  $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$  (negatív kitevőre is!)

#### Algebrai alak:

$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$  „Valós rész a valóssal, képzetes a képzetes résszel adódik össze/vonódik ki.”

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$  „Mindent mindennel össze kell szorozni, és figyelembe venni, hogy  $i^2 = -1$ .”

Lehetőleg ne hatványozzunk algebrai alakban. Főleg ne sokadik hatványt. (lehet, működik, de sokkal egyszerűbb, trigonometrikusan) Persze néha elkerülhetetlen (később példát is mutatunk rá):

$$(a \pm bi)^2 = a^2 - b^2 \pm 2abi$$

$$\begin{aligned} (a + bi)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \cdot (bi)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} \binom{n}{4k} a^{4k} \cdot (b)^{n-4k} - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor} \binom{n}{4k+2} a^{4k+2} \cdot (b)^{n-(4k+2)} \\ &\quad + i \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor} \binom{n}{4k+1} a^{4k+1} \cdot (b)^{n-(4k+1)} - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} \binom{n}{4k+3} a^{4k+3} \cdot (b)^{n-(4k+3)} \right) \end{aligned}$$

Igen, ez ilyen undorító... ezért nem javasolt

Gyökvonás szintén kevésbé ajánlott algebrai alakban. Működik, de legtöbbször csúnya. (később azért lesz példa rá.)

Trigonometrikus alakban:

$r(\cos\varphi + i \sin\varphi) \cdot s(\cos\omega + i \sin\omega) = rs(\cos(\varphi + \omega) + i \sin(\varphi + \omega))$  „A hosszok összeszorzódnak, a szögek összeadódnak”

Lehetőleg ne adjunk össze/vonjunk ki trigonometrikus alakban... menne, de az ehhez szükséges trigonometrikus azonosságokat ritkán használjuk, kevésbé közismertek...

Hatványozás/gyökvonás:

$$r(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i \sin\varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

A gyökvonásnak tehát  $n$  megoldása van a komplex számok körében!!!

Mintapéldák:

1) Adjuk meg a  $z$  komplex számot!

a)  $z + \bar{z} = 8; \quad 2\text{Im}(z) + 3\text{Re}(z) = 16$

Megoldás:

$z = a + bi; \quad \bar{z} = a - bi; \quad \text{Re}(z) = a; \text{Im}(z) = b$

Tehát a két egyenlet:  $\begin{cases} (a + bi) + (a - bi) = 8 \\ 2b + 3a = 16 \end{cases}$

Az elsőt átrendezve:  $a + bi + a - bi = 2a = 8$  Vagyis  $a = 4$ .

Ezt beírva a másodikba:  $2b + 3 \cdot 4 = 16$ . Vagyis  $2b = 4$ , tehát  $b = 2$ .

Tehát  $z = 4 + 2i$

b)  $\arg(z) = \frac{5\pi}{4}, \text{Re}(z) = -2$

Megoldás:

Algebrai alakban:

Legyen  $z = abi$ . A második alapján:  $a = -2$ . A valós rész negatív, tehát  $a = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ .

Vagyis:  $\frac{5\pi}{4} = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{b}{-2}\right)$ . Tehát

$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\left(\frac{b}{-2}\right)$ . Mindkét oldal tangensét

véve:  $\tan\frac{\pi}{4} = 1 = \frac{b}{-2}$ . Tehát  $b = -2$  szintén.

Vagyis  $z = -2 - 2i$

Trigonometrikus alakban:

Alkalmazzuk, hogy

$a = \text{Re}(z) = r \cos(\varphi)$ .

Eszerint  $-2 = r \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = r \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . Tehát

$2\sqrt{2} = r$ .

Vagyis  $z = 2\sqrt{2} \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4}\right)$

Gyors számolás után látszik, hogy a két megoldás ugyanaz.

2)  $(3 + 8i)(2 - 4i) =$

$3 \cdot 2 + 3 \cdot (-4i) + 8i \cdot 2 + (8i) \cdot (-4i) = 6 - 12i + 16i - 32i^2 = 6 + 32 - 12i + 16i = 38 + 4i$

3)

$\frac{5 - 2i}{2i - 3} =$

$\frac{5 - 2i}{-3 + 2i} \cdot \frac{-3 - 2i}{-3 - 2i} = \frac{(5 - 2i)(-3 - 2i)}{(-3)^2 + 2^2} = \frac{-15 - 10i + 6i + 4}{13} = \frac{-19 - 4i}{13}$

4)  $2 \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot 4 \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) =$

$8 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 8 \left(\cos\frac{7\pi}{12} + i \sin\frac{7\pi}{12}\right)$

5)  $i^{-3} =$   
 $i^{-1 \cdot 4 + 1} = i^1 = i$

6)  $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{25} =$

Átírjuk az  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  komplex számot trigonometrikus alakra.

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$a > 0 \rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Tehát } \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{A feladat tehát: } \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^{25}$$

$$\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^{25} = \cos \frac{25\pi}{3} + i \sin \frac{25\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

7) Oldjuk meg a komplex számok körében!  $\sqrt{25}$

Megoldás:

Ne felejtjük el, hogy a komplex számok körében vagyunk, tehát kettő megoldást kell kapnunk.

Meg lehet csinálni trigonometrikus alakban (képlet szerint) vagy algebrai alakban is.

Trigonometrikus alakban:

Írjuk át a 25-t trigonometrikus alakra:

$$25 = 25 + 0i$$

$$r = \sqrt{25^2} = 25$$

$$a > 0 \rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{25}\right) =$$

$$\tan^{-1} 0 = 0.$$

$$\text{Tehát } \sqrt{25} = \sqrt[2]{25}(\cos 0 + i \sin 0)$$

Az ismert tétel alapján:

$$\sqrt[2]{25}(\cos 0 + i \sin 0) =$$

$$\sqrt[2]{25} \left(\cos\left(\frac{0}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{0}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right)\right), k = 0, 1$$

Vagyis a két megoldás

$$5(\cos 0 + i \sin 0) = 5 \text{ illetve}$$

$$5(\cos(0 + \pi) + i \sin(0 + \pi)) = -5$$

Algebrai alakban:

$$25 = 25 + 0i$$

$$\text{Legyen } \sqrt{25} = z = a + bi$$

$$\text{Tehát a } z \text{ olyan, hogy } z^2 = (a + bi)^2 = 25$$

$$\text{Eszerint } 25 = a^2 + 2abi + (bi)^2$$

$$25 = a^2 + 2abi + b^2i^2$$

$$25 = a^2 + 2abi - b^2$$

$$25 = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$25 + 0i = a^2 - b^2 + 2abi$$

Mivel a valós részek és a képzetes részek is egyenlők kell legyenek:

$$\begin{cases} 25 = a^2 - b^2 \\ 0 = 2ab \end{cases} \quad a, b \in \mathbf{R}$$

Két (valós) szám szorzata csak akkor lesz 0, ha az egyik maga is 0.

Tehát vizsgáljuk a két esetet:

1. ha  $a = 0$ , akkor az első egyenlet szerint:

$25 = -b^2$ , ami VALÓS számok körében nem lehetséges.

2. ha  $b = 0$ , ekkor az első egyenlet szerint:

$$25 = a^2, \text{ tehát } a = \pm 5.$$

Eszerint a két megoldás:

$$z = 5 + 0i \text{ és } z = -5 + 0i.$$

Szerencsére ez a két megoldás jött ki a trigonometrikus alakban is. ☺

8) **Ábrázoljuk a komplex számsíkon!**

a)  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z + 5i| \geq |z|\}$

Megoldás:

Legyen  $z = a + bi$ ,  $z + 5i = a + (b + 5)i$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $|z + 5i| = \sqrt{a^2 + (b + 5)^2}$

A feltétel szerint:  $|z| \leq |z + 5i|$ .

Tehát:  $\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{a^2 + (b + 5)^2}$  Mivel mindkét oldal pozitív, a négyzetre emelés nem okoz problémát!

$a^2 + b^2 \leq a^2 + (b + 5)^2$

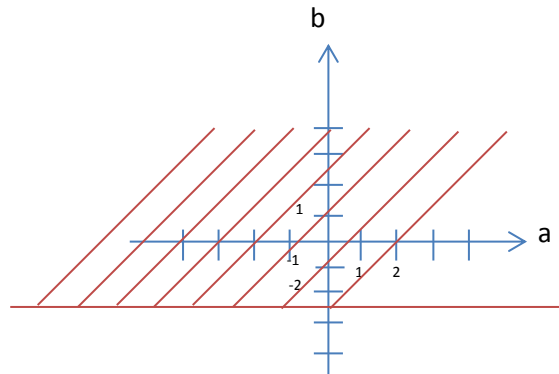
$a^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 + 10b + 25$

$0 \leq 10b + 25$

$-25 \leq 10b$

$-\frac{5}{2} \leq b$

Keressük meg az (a,b) koordinátarendszerben azokat a pontokat melyre ez teljesül!



b)  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq |z - 2i|; |z - i| \leq 1\}$

Megoldás:

Legyen szokás szerint

$z = a + bi$   $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$z - 2i = a + (b - 2)i$   $|z - 2i| = \sqrt{a^2 + (b - 2)^2}$

$z - i = a + (b - 1)i$   $|z - i| = \sqrt{a^2 + (b - 1)^2}$

A feltételek szerint:

$|z| \leq |z - 2i|$

$\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2 - 4b + 4}$  Mivel mindkét oldal pozitív négyzetre emelhetünk.

$a^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 - 4b + 4$

$0 \leq -4b + 4$

$4b \leq 4$

**$b \leq 1$  Ez ugye egy egyenes és az általa határolt egyik félsík. (Ábrán pirossal)**

A másik feltétel pedig:

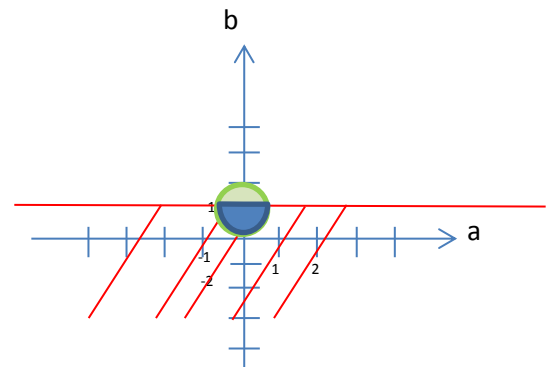
$|z - i| < 1$

$\sqrt{a^2 + (b - 1)^2} \leq 1$  Mivel mindkét oldal pozitív gond négyzetre emelhetünk

**$a^2 + (b - 1)^2 \leq 1$  Ez ugye egy (0, 1) középpontú, 1 sugarú kör, és az azon belüli pontok. (Ábrán zölddel)**

A két feltételnek egyszerre kell teljesülnie:

Ezek tehát a kör felső fele. **Az ábrán kékkel jelölve.**



c)  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 9, \text{Im}(z) > \text{Re}(z)\}$

Megoldás:

Legyen  $z = a + bi$ ,  $\text{Re}(z) = a, \text{Im}(z) = b$ ,  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Az első feltétel szerint

$|z| \geq 9$

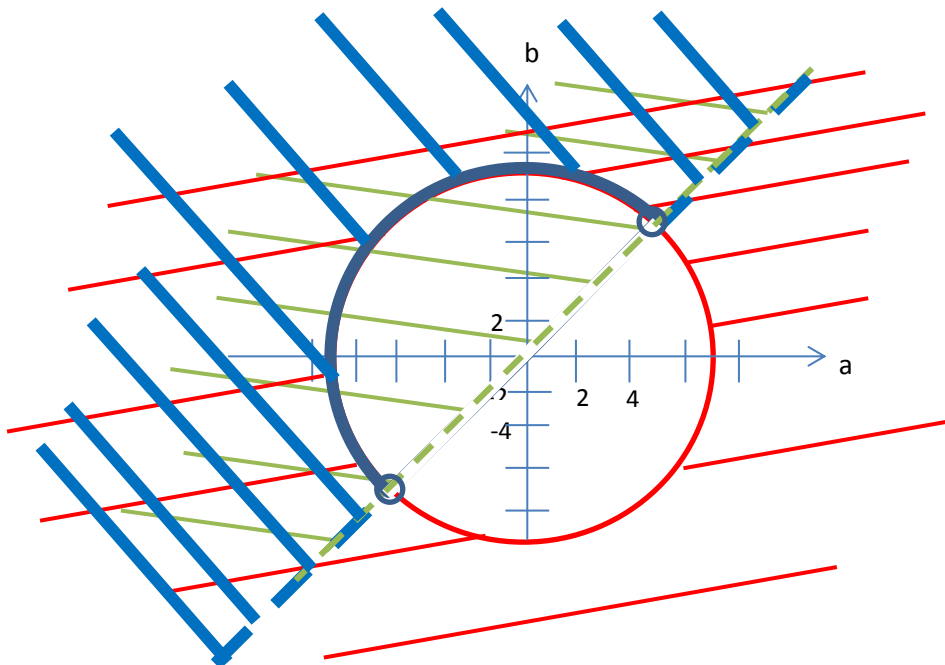
$\sqrt{a^2 + b^2} \geq 9$  Mivel mindkét oldal pozitív egyszerűen négyzetre emelhetünk.

$a^2 + b^2 \geq 81$  Ez egy  $(0, 0)$  középpontú, 9 sugarú kör, és az azon kívül eső pontok. (Ábrán pirossal.) Figyeljünk, hogy a körvonal is megfelelő!

A másik feltétel szerint:

$\text{Im}(z) > \text{Re}(z)$  Vagyis  $b > a$ . Ez a 45 fokos egyenes által határolt félsík. (Ábrán zölddel.) Figyeljünk, hogy maga az egyenes nem felel meg, azt szaggatott vonallal jelezzük!

A megoldás a két halmaz metszete, vagyis az melyek mind zöld, mind pirossal jelöltek. Szenteljünk különös figyelmet a kör és az egyenes metszéspontjainak. Mivel ez a két pont olyan, hogy az első feltételnek nem felelnek meg, míg a másodiknak igen, ez a két pont nincs benne a végső halmazban. Ezt üres karikával szoktuk jelölni. (a végső megoldást érdemes egy elütő színnel megjelölni, ábrán kékkel)



9) Oldjuk meg a komplex számok körében!

a)  $(3 + i)z^2 - 2z + 4 - 4i = 0$

Megoldás:

Ez egy másodfokú egyenlet, használjuk a megoldó képletet, mely a komplex számok körében is működik.

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3 + i)(4 - 4i)}}{2(3 + i)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(12 + 4 + 4i - 12i)}}{6 + 2i} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - (64 - 8i)}}{6 + 2i}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-60 + 32i}}{6 + 2i} = \frac{2 \pm \sqrt{4(-15 + 8i)}}{6 + 2i} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-15 + 8i}}{6 + 2i}$$

Az egyszerűség kedvéért külön számoljuk ki a gyökvonást:

A gyökvonást lehet trigonometrikus alakban vagy algebrai alakban elvégezni:

Trigonometrikus alakban:

Írjuk át a  $-15 + 8i$  számot trigonometrikus alakba!

$$r = \sqrt{(-15)^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$$

$$\text{Mivel } a < 0 \rightarrow \varphi = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{8}{-15}\right)$$

$$\text{Tehát } \varphi = 180^\circ - 28,07^\circ = 151,93^\circ$$

Tehát a

$$-15 + 8i = 17(\cos 151,93^\circ + i \sin 151,93^\circ)$$

Vagyis a gyökvonás két lehetséges eredménye:

$$\sqrt{17}\left(\cos\frac{151,93^\circ}{2} + i \sin\frac{151,93^\circ}{2}\right) =$$

$$\sqrt{17}(\cos 75,97^\circ + i \sin 75,97^\circ) = 1 + 4i$$

Illetve:

$$\begin{aligned} \sqrt{17}\left(\cos\left(\frac{151,93^\circ}{2} + 180^\circ\right) + i \sin\left(\frac{151,93^\circ}{2} + 180^\circ\right)\right) \\ = \sqrt{17}(\cos 255,97^\circ + i \sin 255,97^\circ) = -1 - 4i \end{aligned}$$

Pontos értéket csak akkor kapunk, ha menet közben sehol nem kerekítünk!

Algebrai alakban:

$$\text{Legyen } \sqrt{-15 + 8i} = z = a + bi$$

Tehát

$$\begin{aligned} -15 + 8i &= (a + bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 \\ &= a^2 + b^2i^2 + 2abi \\ &= a^2 - b^2 + 2abi \end{aligned}$$

Mivel a valós és képzetes részeknek meg kell egyeznie a következőt kapjuk:

$$\begin{cases} -15 = a^2 - b^2 \\ 8 = 2ab \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

A második egyenletből fejezzük ki  $a$ -t!

$$a = \frac{8}{2b} = \frac{4}{b}. \text{ Ezt beírva az első egyenletbe:}$$

$$-15 = \left(\frac{4}{b}\right)^2 - b^2 = \frac{16}{b^2} - b^2$$

A  $b^2$  nem lehet 0, hiszen akkor a második egyenlet nem lenne igaz. Tehát beszorozhatunk vele.

$$-15b^2 = 16 - b^4$$

$$b^4 - 15b^2 - 16 = 0$$

$$\text{Legyen } b^2 = y^2, \text{ ekkor}$$

$$y^2 - 15y - 16 = 0 \text{ egyenletet kell megoldani.}$$

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot (-16)}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{289}}{2} \\ &= \frac{15 \pm 17}{2} \end{aligned}$$

Tehát a két megoldás  $y = b^2 = -1$ , mely a VALÓS számok körében nem megoldható, illetve  $y = b^2 = 16$ .

$$\text{Eszerint } b = \pm 4. \text{ Ebből pedig } a = \frac{4}{b} = \pm 1$$

Tehát a két megoldás:

$$z = 1 + 4i \text{ illetve } z = -1 - 4i.$$

Ez után térjünk vissza az eredeti egyenletünk megoldó képletéhez:

$$\frac{2 \pm 2\sqrt{-15 + 8i}}{6 + 2i} = \frac{2 \pm 2(1 + 4i)}{6 + 2i} \quad \text{vagy} \quad \frac{2 \pm 2\sqrt{-15 + 8i}}{6 + 2i} = \frac{2 \pm 2(-1 - 4i)}{6 + 2i}$$

Mivel  $-1 - 4i = -(1 + 4i)$  elég az egyiket vizsgálni, hiszen valójában ugyanazok.

$$\begin{aligned} \frac{2 \pm 2(1 + 4i)}{6 + 2i} &= \frac{2 + 2(1 + 4i)}{6 + 2i} \quad \text{vagy} \quad \frac{2 - 2(1 + 4i)}{6 + 2i} \\ \frac{2 + 2(1 + 4i)}{6 + 2i} &= \frac{2 + 2 + 8i}{6 + 2i} = \frac{4 + 8i}{6 + 2i} = \frac{2 + 4i}{3 + 1i} = \frac{2 + 4i}{3 + i} \cdot \frac{3 - i}{3 - i} = \frac{(2 + 4i)(3 - i)}{9 + 1} = \frac{6 + 4 + 12i - 2i}{10} \\ &= \frac{10 + 10i}{10} = 1 + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2 - 2(1 + 4i)}{6 + 2i} &= \frac{2 - 2 - 8i}{6 + 2i} = \frac{-8i}{6 + 2i} = \frac{-4i}{3 + 1i} = \frac{-4i}{3 + i} \cdot \frac{3 - i}{3 - i} = \frac{(-4i)(3 - i)}{9 + 1} = \frac{-12i - 4}{10} = \frac{-4 - 12i}{10} \\ &= -\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i\end{aligned}$$

Tehát a komplex együtthatós egyenlet két megoldása:  $(1 + i)$  és  $-\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i$ .