

Sorozatok összefoglalás

Definíció: A sorozat a (pozitív) természetes számokon értelmezett függvény. Az $a_1; a_2; a_3; \dots a_k \dots$ sorozatot a_n -nel jelöljük.

Def: Egy sorozat **korlátos**, ha létezik K , hogy a sorozat minden elemére $(n \in \mathbf{N}), |a_n| \leq K$.

Def: Egy sorozat **monoton nő**, ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$. Szigorú monotonitás esetén az egyenlőség sincs megengedve.

Def: Egy sorozat **monoton csökken**, ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$. Szigorú monotonitás esetén az egyenlőség sincs megengedve.

Műveletek sorozatokkal:

$$\lambda(a_n) := (\lambda a_n) \quad (a_n) + (b_n) := (a_n + b_n) \quad (a_n)(b_n) := (a_n \cdot b_n) \quad \text{ha } b_n \neq 0, \frac{(a_n)}{(b_n)} := \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

Sorozat határértéke:

Def: Azt mondjuk, hogy egy a_n sorozat **konvergens**, ha létezik egy olyan A valós szám, melyre teljesül, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorlát esetén található olyan $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy minden $n > N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$. Azt mondjuk, hogy A a sorozat határértéke, jelöléssel: $\lim a_n = A$.

Def: Ha a_n divergens, de bármely K valós számhoz található olyan $N(K)$ küszöbindexet, hogy bármely $n > N(K)$ esetén $a_n > K$, akkor azt mondjuk, hogy a **sorozat határértéke** ∞ . Jelöléssel: $\lim a_n = \infty$. (ettől még divergens!!!) Hasonlóan lehet $-\infty$ határértéket definiálni.

Tétel: A határérték egyértelmű.

Tétel: Ha $\lim a_n = A$ és $\lim b_n = B$, akkor $\lim(a_n \pm b_n) = A \pm B$.

Ha $\lim a_n = A$, akkor $\lim c \cdot a_n = c A$.

Ha $\lim a_n = 0$ és $\lim b_n = 0$, akkor $\lim a_n b_n = 0$

Ha $\lim a_n = A$ és $\lim b_n = B$, akkor $\lim a_n b_n = AB$

Ha $\lim a_n = 0$ és b_n korlátos akkor $\lim a_n b_n = 0$

Ha $\lim a_n = A$, akkor $\lim |a_n| = |A|$

Ha $\lim b_n = B \neq 0$, akkor $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$

Ha $\lim b_n = B \neq 0$ és $\lim a_n = A$, akkor $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$

Ha $a_n \geq 0$ és $\lim a_n = A \geq 0$, akkor $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$

Ha $\lim a_n = \infty$, akkor $\lim \frac{1}{a_n} = 0$

Ha $\lim a_n = 0$, akkor $\lim \frac{1}{|a_n|} = \infty$

Tétel: Ha a_n, b_n olyanok, hogy minden n esetén $a_n \leq b_n$, akkor $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Tétel: (rendőrelv/szendvics szabály, stb...) Ha a_n, b_n és c_n olyanok, hogy minden n esetén $a_n \leq b_n \leq c_n$, továbbá tudjuk, hogy $\lim a_n = \lim c_n = A$, akkor $\lim b_n = A$ szintén.

Tétel: Ha a_n monoton és korlátos, akkor konvergens.

Tétel: (nevezetes határértékek)

$$\lim a^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |a| < 1 \\ 1, & \text{ha } a = 1 \\ \infty, & \text{ha } a > 1 \\ \text{divergens egyébként} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim n^k &= \infty, & \text{ha } k \geq 1 \\ \lim \frac{1}{n} &= 0, & \lim \frac{1}{n^k} = 0, & \text{ha } k \geq 1 \\ \lim n^k a^n &= 0, & \text{ha } |a| < 1 \text{ és } k \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim \sqrt[n]{p} &= 1, & \text{ha } p > 0 \\ \lim \sqrt[n]{n} &= 1 \\ \lim \frac{n^n}{n!} &= \infty \\ \lim \frac{n!}{2^n} &= \infty \\ \lim \frac{2^n}{n^k} &= \infty & k \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim \frac{n^l}{n^k} &= \infty & k, l \geq 1 \\ \lim \frac{1}{n^k} &= 0 \\ \lim \frac{1}{\log n} &= 0 \\ \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e \\ \lim \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n &= e^\alpha \end{aligned}$$

Tehát a nagyságrendi sorrend:

$$n^n \gg n! \gg 2^n \gg n^k \gg n^{\frac{1}{k}} \gg \log n$$

Tétel: Ha $\lim a_n = A$ létezik, akkor a_n bármely részsorozata is A -hoz tart.

Tétel: Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

Tétel: Korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Tétel: (Cauchy-féle konvergencia kritérium). Az a_n sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik egy $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Def: Egy a_n számsorozat Cauchy-sorozat, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik egy $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - a_m| < \varepsilon$. (Vagyis egy sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.)

Sorozat torlódási pontjai:

Def: A $t \in \mathbf{R}$ vagy $t = \pm\infty$ az a_n sorozat torlódási pontja, ha a t minden környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. (Tehát létezik az a_n sorozatnak egy részsorozata, amely t -hez tart.)

Tétel: Egy valós számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha egy valós szám az egyetlen torlódási pontja. ($\lim a_n = \infty$, ha $t = \infty$ az egyetlen torlódási pontja, $-\infty$ hasonlóan.)

Def: $S :=$ az a_n sorozat torlódási pontjainak halmaza.

Tétel: Ha a torlódási pontok halmaza korlátos, akkor van ezek közül legnagyobb, vagyis legnagyobb torlódási pont.

Def (limesz superior): $\limsup a_n = \overline{\lim} a_n := \begin{cases} \text{legnagyobb torlódási pont,} & \text{ha } S \text{ felülről korlátos} \\ -\infty, & \text{ha } S = \emptyset \text{ vagy } S = \{-\infty\} \\ \infty, & \text{különben} \end{cases}$

Def (limesz inferior): $\liminf a_n = \underline{\lim} a_n := \begin{cases} \text{legkisebb torlódási pont,} & \text{ha } S \text{ alulról korlátos} \\ \infty, & \text{ha } S = \emptyset \text{ vagy } S = \{\infty\} \\ -\infty, & \text{különben} \end{cases}$

Tétel: Ha a sorozatnak létezik határértéke, akkor $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n = \lim a_n$.

Mintapéldák:

1. Számoljuk (definíció szerint) a határértéket!

a. $a_n = \frac{n^3+3n}{n^2+2}$

Megoldás:

$$\lim \frac{n^3+3n}{n^2+2} = \infty, \text{ mivel}$$

$$\frac{n^3+3n}{n^2+2} \geq \frac{n^3}{n^2+2} \geq \frac{n^3}{n^2+2n^2} = \frac{n^3}{3n^2} = \frac{n}{3} > K \quad \rightarrow \quad n > 3K \quad N(K) \geq [3K]$$

Vagyis bármely K értékhez találtunk egy küszöbindexet ($3K$) -t, hogy az annál nagyobb indexű tagok, már biztos nagyobbak, mint K . Eszerint $\lim a_n = \infty$.

b. $-n^2 + 3\sqrt{n} - 9$

Megoldás:

$$\lim -n^2 + 3\sqrt{n} - 9 = -\infty, \text{ mivel}$$

$$-n^2 + 3\sqrt{n} - 9 \leq -n^2 + 3\sqrt{n} \leq^* -n^2 + \frac{n^2}{2} = -\frac{n^2}{2} \leq K \quad \rightarrow -n^2 \leq 2K \quad \rightarrow n \geq \sqrt{-2K}$$

A * egyenlőtlenség akkor igaz, ha $3\sqrt{n} < \frac{n^2}{2}$. Ezt könnyű belátni, hogy a 37. tagtól teljesül:

$$3\sqrt{n} < \frac{n^2}{2} \leftrightarrow 6 < \frac{n}{\sqrt{n}} \leftrightarrow 6 < \sqrt{n} \leftrightarrow 36 < n.$$

Tehát a fenti becslés működik, ha $n \geq 37$. Nézzük, tehát hogy K -hoz milyen $N(K)$ küszöbindex kell.

$$N(K) \geq \max\{37, \lceil \sqrt{-2K} \rceil\}$$

2. Adj meg egy megfelelő küszöbindexet!

a. $a_n = \frac{3n^2 + 4n + 7}{n^2 + n + 1} \rightarrow 3, \quad N(\varepsilon) = ?$

Megoldás:

Valaki megmondta, hogy a határérték 3. Tehát a határérték definíciója szerint minden ε -hoz van egy küszöbindex melyre:

$$\begin{aligned} |a_n - A| &\leq \varepsilon \\ \left| \frac{3n^2 + 4n + 7}{n^2 + n + 1} - 3 \right| &= \left| \frac{3n^2 + 4n + 7}{n^2 + n + 1} - \frac{3n^2 + 3n + 3}{n^2 + n + 1} \right| = \left| \frac{3n^2 + 4n + 7 - (3n^2 + 3n + 3)}{n^2 + n + 1} \right| \\ &= \left| \frac{n + 4}{n^2 + n + 1} \right| =^* \frac{n + 4}{n^2 + n + 1} \leq \frac{n + 4n}{n^2 + n + 1} \leq \frac{5n}{n^2} \leq \frac{5n}{n^2} \leq \frac{5}{n} \leq \varepsilon \quad \rightarrow \quad \frac{5}{\varepsilon} \leq n \end{aligned}$$

A * egyenlőség teljesül, hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén mind a számláló, mind a nevező pozitív.

Tehát az $\lceil \frac{5}{\varepsilon} \rceil$ épp jó küszöbindex lesz. Tehát $N(\varepsilon) \geq \lceil \frac{5}{\varepsilon} \rceil$.

b. $a_n = \frac{10^9 - n^3}{4n^5 + 3n^3 - 6n} \rightarrow 0, \quad N(\varepsilon) = ?$

Megoldás:

Megint valaki „megsúgta”, hogy mi a határérték. Tehát a definíció alapján:

$$\begin{aligned} |a_n - A| &\leq \varepsilon \\ \left| \frac{10^9 - n^3}{4n^5 + 3n^3 - 6n} - 0 \right| &= \left| \frac{10^9 - n^3}{4n^5 + 3n^3 - 6n} \right| =^* \frac{n^3 - 10^9}{4n^5 + 3n^3 - 6n} \leq \frac{n^3}{4n^5 + 3n^3 - 6n} \leq \frac{n^3}{4n^5} \leq \frac{1}{4n^2} \leq \varepsilon \\ &\rightarrow \frac{1}{4\varepsilon} \leq n^2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon}} \leq n \end{aligned}$$

A * teljesül abban az esetben, ha $10^9 < n^3$ azaz ha $10^3 < n$, hiszen ebben az esetben a számláló negatív, a nevező pozitív. Vigyázzunk arra, hogy a küszöbindex legalább ekkora legyen.

Tehát a küszöbindexnek épp megfelel a $\sqrt{\frac{1}{4\varepsilon}}$ és a 10^3 közül a nagyobbik.

$$\text{Tehát: } N(\varepsilon) \geq \max\left\{ \sqrt[5]{\frac{10^9}{4\varepsilon}}, 10^3 \right\}.$$

3. Adjuk meg a határértéket!

a. $\lim \frac{2n^4 + 3n + 6}{3n^4 - 8n^2 + 5n} = ?$

Megoldás:

$\frac{\text{polinom}}{\text{polinom}}$ típusú sorozat határértékének vizsgálatakor mindig egyszerűsítsünk a legnagyobb kitevőjű n hatvánnyal!

Ez ebben az esetben n^4

$$\lim \frac{2n^4 + 3n + 6}{3n^4 - 8n^2 + 5n} = \lim \frac{2 \frac{n^4}{n^4} + 3 \frac{n}{n^4} + 6 \frac{1}{n^4}}{3 \frac{n^4}{n^4} - 8 \frac{n^2}{n^4} + 5 \frac{n}{n^4}} = \lim \frac{2 + 3 \frac{1}{n^3} + 6 \frac{1}{n^4}}{3 + 8 \frac{1}{n^2} + 5 \frac{1}{n^3}} = \frac{2 + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0}{3 + 8 \cdot 0 + 5 \cdot 0} = \frac{2}{3}$$

Az utolsó előtti lépésben kihasználtuk, hogy $\frac{1}{n^k} \rightarrow 0$, ha $k \geq 1$. Szintén kihasználjuk, hogy a határértékek ha léteznek, akkor összeadódnak.

b. $\lim \frac{n^2 + 8n - 3}{5n^5 + 3n^3 + 1} = ?$

Megoldás:

Ismét egyszerűsítsünk a legnagyobb kitevőjű n hatvánnyal, ez most n^5 .

$$\lim \frac{n^2 + 8n - 3}{5n^5 + 3n^3 + 1} = \lim \frac{\frac{n^2}{n^5} + 8 \frac{n}{n^5} - 3 \frac{1}{n^5}}{5 \frac{n^5}{n^5} + 3 \frac{n^3}{n^5} + 1 \frac{1}{n^5}} = \lim \frac{\frac{1}{n^3} + 8 \frac{1}{n^4} - 3 \frac{1}{n^5}}{5 + 3 \frac{1}{n^2} + 1 \frac{1}{n^5}} = \frac{0 + 8 \cdot 0 - 3 \cdot 0}{5 + 3 \cdot 0 + 0} = 0$$

Felhasználtuk, hogy $\frac{1}{n^k} \rightarrow 0$, ha $k \geq 1$, hogy a határértékek ha léteznek, akkor összeadódnak.

c. $\lim \frac{n^4 + 8n^2 - 1}{n^2 + 2n + 3} = ?$

Megoldás:

Ismét egyszerűsíthetünk a legnagyobb kitevővel, ami jelen esetben n^4 .

$$\lim \frac{n^4 + 8n^2 - 1}{n^2 + 2n + 3} = \lim \frac{\frac{n^4}{n^4} + 8 \frac{n^2}{n^4} - 1 \frac{1}{n^4}}{\frac{n^2}{n^4} + 2 \frac{n}{n^4} + 3 \frac{1}{n^4}} = \lim \frac{1 + 8 \frac{1}{n^2} - 1 \frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^2} + 2 \frac{1}{n^3} + 3 \frac{1}{n^4}} = \frac{1 + 8 \cdot 0 - 1 \cdot 0}{0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0} = \frac{1}{0} = \infty$$

Felhasználtuk, hogy $\frac{1}{n^k} \rightarrow 0$, ha $k \geq 1$, hogy a határértékek ha léteznek, akkor összeadódnak.

Figyelni kell, hogy az $\frac{1}{0}$ határérték nem automatikusan ∞ !!! Onnan tudjuk, hogy $+\infty$ (és nem $-\infty$), hogy minden $n \in \mathbf{N}$ esetén mind a számláló, mind a nevező pozitív, így a tört értéke is pozitív!

d. $\lim \frac{-n^5 + 6n^2 + 1}{n^3 - 2n + 5} = ?$

Megoldás:

Ismét egyszerűsíthetünk a legnagyobb kitevővel, ami jelen esetben n^5 .

$$\lim \frac{-n^5 + 6n^2 + 1}{n^3 - 2n + 5} = \lim \frac{\frac{-n^5}{n^5} + 6 \frac{n^2}{n^5} + 1 \frac{1}{n^5}}{\frac{n^3}{n^5} - 2 \frac{n}{n^5} + 5 \frac{1}{n^5}} = \lim \frac{-1 + 6 \frac{1}{n^3} + 1 \frac{1}{n^5}}{\frac{1}{n^2} - 2 \frac{1}{n^4} + 5 \frac{1}{n^5}} = \frac{-1 + 6 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{0 - 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

Felhasználtuk, hogy $\frac{1}{n^k} \rightarrow 0$, ha $k \geq 1$, hogy a határértékek ha léteznek, akkor összeadódnak.

Figyelni kell, hogy az $\frac{1}{0}$ határérték nem automatikusan ∞ !!! Onnan tudjuk, hogy itt $-\infty$ hogy „elég nagy” $n \in \mathbf{N}$ esetén (az elég nagy jelen esetben akkora, hogy $n^5 > 6n^2 + 1$, vagyis ha $n > 2$) a számláló negatív, míg a nevező pozitív, így a tört értéke is a második tagtól kezdve mindig negatív!

e. $\lim \frac{n^{\frac{2}{3}} - 3\sqrt{2n+1}}{n^2 + n\sqrt{3}} = ?$

Megoldás:

Ha jobban megnézzük, akkor ebben a kifejezésben is csak n hatványok, szerepelnek, mind a nevezőben, mind a számlálóban. Itt is a legnagyobb kitevőjű n hatvánnyal érdemes egyszerűsíteni. Ahhoz, hogy könnyen látsszon, hogy melyik is ez érdemes mindent valóban n hatványként felírni!

$$\begin{aligned} \lim \frac{n^{\frac{2}{3}} - 3\sqrt{2n} + 1}{n^5 + n^{\sqrt{3}}} &= \lim \frac{n^{\frac{2}{3}} - 3\sqrt{2}n^{\frac{1}{2}} + 1}{n^2 + n^{\sqrt{3}}} = \lim \frac{\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n^2} - 3\sqrt{2}\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} + 1\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n^{\sqrt{3}}}{n^2}} = \lim \frac{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} - 3\sqrt{2}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + 1\frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^{2-\sqrt{3}}}}} \\ &= \frac{0 - 3\sqrt{2} \cdot 0 + 0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy $\frac{1}{n^k} \rightarrow 0$, ha $k \geq 1$, hogy a határértékek ha léteznek, akkor összeadódnak.

f. $\lim \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} = ?$

Megoldás:

A $\frac{\text{faktoriális}}{\text{faktoriális}}$ típusú határértékektől nem szabad megijedni, a faktoriálisok egyszerűsítése után gyakran egyszerű $\frac{\text{polinom}}{\text{polinom}}$ típusú kifejezések maradnak. Ugyanez vonatkozik az $\binom{n}{k}$ -t tartalmazó kifejezésekre.

$$\begin{aligned} \lim \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} &= \lim \frac{\frac{n!}{(n-2)!2!}}{\frac{n!}{(n-3)!3!}} = \lim \left(\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} : \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} \right) = \lim \left(\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} \cdot \frac{(n-3)! \cdot 3!}{n!} \right) \\ &= \lim \frac{(n-3)! \cdot 3!}{(n-2)! \cdot 2!} = \lim \frac{3! \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdots \cdots 1}{2! \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdots \cdots 1} = \lim \frac{3!}{2!(n-2)} = \\ &= \lim \frac{6}{2(n-2)} = \lim \frac{6}{2n-2} = \lim \frac{6\frac{1}{n}}{2\frac{n}{n} - 2\frac{1}{n}} = \frac{0}{2-2 \cdot 0} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy $\frac{1}{n^k} \rightarrow 0$, ha $k \geq 1$, hogy a határértékek ha léteznek, akkor összeadódnak.

4. Számoljuk ki a következő határértékeket!

a. $\lim \sqrt{9n^2 + 7} - \sqrt{9n^2 + 2n + 5} = ?$

Megoldás:

A „ $\infty - \infty$ ” típusú határértékekre nem tanultunk tételket, ennek értéke bármi lehet. Így „ügyeskednünk” kell.

$a - b$ („ $\infty - \infty$ ”) típusú kifejezéseket megszorozhatjuk $\frac{a+b}{a+b}$ -vel, így a határértékük általában könnyebben kiszámítható.

$$\begin{aligned} \lim \sqrt{9n^2 + 7} - \sqrt{9n^2 + 2n + 5} &= \lim \left(\sqrt{9n^2 + 7} - \sqrt{9n^2 + 2n + 5} \right) \cdot \frac{\sqrt{9n^2 + 7} + \sqrt{9n^2 + 2n + 5}}{\sqrt{9n^2 + 7} + \sqrt{9n^2 + 2n + 5}} \\ &= \lim \frac{(9n^2 + 7) - (9n^2 + 2n + 5)}{\sqrt{9n^2 + 7} + \sqrt{9n^2 + 2n + 5}} = \lim \frac{-2n + 2}{\sqrt{9n^2 + 7} + \sqrt{9n^2 + 2n + 5}} \end{aligned}$$

Megint egyszerűsíteniünk kellene a legnagyobb n hatvánnyal. Vegyük észre, hogy a számlálóban ez n^1 , míg a nevezőben ez $\sim \sqrt{n^2} = n$ szintén. Tehát egyszerűsítsünk n -nel.

$$\begin{aligned} \lim \frac{-2n + 2}{\sqrt{9n^2 + 7} + \sqrt{9n^2 + 2n + 5}} &= \lim \frac{-2\frac{n}{n} + 2\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{9n^2 + 7}}{n} + \frac{\sqrt{9n^2 + 2n + 5}}{n}} \\ &= \lim \frac{-2 + 2\frac{1}{n}}{\sqrt{9\frac{n^2}{n^2} + 7\frac{1}{n^2}} + \sqrt{9\frac{n^2}{n^2} + 2\frac{n}{n^2} + 5\frac{1}{n^2}}} = \lim \frac{-2 + 2\frac{1}{n}}{\sqrt{9 + 7\frac{1}{n^2}} + \sqrt{9 + 2\frac{1}{n} + 5\frac{1}{n^2}}} = \\ &= \frac{-2 + 2 \cdot 0}{\sqrt{9 + 7 \cdot 0} + \sqrt{9 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0}} = \frac{-2}{3 + 3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy $\frac{1}{n^k} \rightarrow 0$, ha $k \geq 1$, hogy a határértékek ha léteznek, akkor összeadódnak, illetve, hogy ha létezik a határérték, akkor $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim a_n}$.

b. $\lim \sqrt{4n^4 + n - 2} - 2n^2 = ?$

Megoldás:

Bármilyen más $a - b$ típusú határértékkel is eljárhatunk ugyanúgy: szorozzuk meg $\frac{a+b}{a+b}$ -vel

$$\begin{aligned} \lim \sqrt{4n^4 + n - 2} - 2n^2 &= \lim \left(\sqrt{4n^4 + n - 2} - 2n^2 \right) \cdot \frac{\sqrt{4n^4 + n - 2} + 2n^2}{\sqrt{4n^4 + n - 2} + 2n^2} \\ &= \lim \frac{(4n^4 + n - 2) - (4n^4)}{\sqrt{4n^4 + n - 2} + 2n^2} = \lim \frac{n - 2}{\sqrt{4n^4 + n - 2} + 2n^2} \end{aligned}$$

A számlálóban a legnagyobb kitevő egyértelműen az n , míg a nevezőben $\sim \sqrt{n^4} = n^2$.
 Tehát ezzel egyszerűsítsük a törtünket.

$$\begin{aligned} \lim \frac{n - 2}{\sqrt{4n^4 + n - 2} + 2n^2} &= \lim \frac{\frac{n}{n^2} - 2 \frac{1}{n^2}}{\frac{\sqrt{4n^4 + n - 2}}{n^2} + \frac{2n^2}{n^2}} = \lim \frac{\frac{1}{n} - 2 \frac{1}{n^2}}{\sqrt{4 \frac{n^4}{n^4} + \frac{n}{n^4} - 2 \frac{1}{n^4}} + 2} \\ &= \frac{0 - 2 \cdot 0}{\sqrt{4 + 0 - 2 \cdot 0} + 2} = \frac{0}{4} = 0 \end{aligned}$$

Közben felhasználtuk, hogy $\frac{1}{n^k} \rightarrow 0$, ha $k \geq 1$, hogy a határértékek ha léteznek, akkor összeadódnak, illetve, hogy ha létezik a határérték, akkor $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim a_n}$.

c. $\lim \frac{1}{n - \sqrt{n^2 + n + 5}} = ?$

Megoldás:

A probléma ugyanaz, mint eddig, a $\infty - \infty$ határértékkel nem tudunk mit kezdeni a nevezőben sem. Ekkor szintén bővíthetünk a két tag összegével.

$$\begin{aligned} \lim \frac{1}{n - \sqrt{n^2 + n + 5}} &= \lim \frac{1}{n - \sqrt{n^2 + n + 5}} \cdot \frac{n + \sqrt{n^2 + n + 5}}{n + \sqrt{n^2 + n + 5}} = \lim \frac{n + \sqrt{n^2 + n + 5}}{n^2 - (n^2 + n + 5)} \\ &= \lim \frac{n + \sqrt{n^2 + n + 5}}{-n - 5} = \lim \frac{\frac{n}{n} + \frac{\sqrt{n^2 + n + 5}}{n}}{\frac{-n}{n} - 5 \frac{1}{n}} = \lim \frac{1 + \sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} + 5 \frac{1}{n^2}}}{-1 - 5 \frac{1}{n}} \\ &= \lim \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n} + 5 \frac{1}{n^2}}}{-1 - 5 \frac{1}{n}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 0 + 5 \cdot 0}}{-1 - 5 \cdot 0} = \frac{2}{-1} = -2 \end{aligned}$$

5. Számoljuk ki a következő határértékeket!

a. $\lim \frac{5^{n+2} + (-1)^n}{5^n} = ?$

Megoldás:

A csak exponenciális tagokat tartalmazó törtkifejezések minden tagját alakítsuk $k \cdot a^n$ alakra (de legalábbis ugyanolyan kitevőkre), majd egyszerűsítsük a(z abszolút értékben) legnagyobb alapú taggal. Ez után tudjuk használni az a^n határértékére vonatkozó tételt.

A legnagyobb alapú tag jelen esetben 5^n .

$$\begin{aligned} \lim \frac{5^{n+2} + (-1)^2}{5^n} &= \lim \frac{5^n \cdot 5^2 + (-1)^n}{5^n} = \lim \frac{25 \cdot \frac{5^n}{5^n} + \frac{(-1)^n}{5^n}}{\frac{5^n}{5^n}} = \lim \frac{25 \cdot \left(\frac{5}{5}\right)^n + \left(\frac{-1}{5}\right)^n}{\left(\frac{5}{5}\right)^n} \\ &= \frac{25 \cdot 1 + 0}{1} = 25 \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy ha létezik, akkor a határértékek összeadódnak, illetve hogy $a^n \rightarrow 0$, ha $|a| < 1$.

b. $\lim \frac{8^{n-1} + 3^{n+3}}{2^{n+3} \cdot 3^n} = ?$

Megoldás:

$$\lim \frac{8^{n-1} + 3^{n+3}}{2^{n+3} \cdot 3^n} = \lim \frac{8^n \cdot 8^{-1} + 3^n \cdot 3^3}{2^3 \cdot 2^n \cdot 3^n} = \lim \frac{\frac{1}{8} \cdot 8^n + 27 \cdot 3^n}{8 \cdot (2 \cdot 3)^n} = \lim \frac{\frac{1}{8} \cdot 8^n + 27 \cdot 3^n}{8 \cdot 6^n}$$

Ebből az alakból már könnyen látszik, hogy a legnagyobb alapú tag a 8^n .

$$\lim \frac{\frac{1}{8} \cdot 8^n + 27 \cdot 3^n}{8 \cdot 6^n} = \lim \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{8^n}{8^n} + 27 \cdot \frac{3^n}{8^n}}{8 \cdot \frac{6^n}{8^n}} = \lim \frac{\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{8}{8}\right)^n + 27 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^n}{8 \cdot \left(\frac{6}{8}\right)^n} = \frac{\frac{1}{8} \cdot 1 + 27 \cdot 0}{8 \cdot 0} = \frac{\frac{1}{8}}{0} = \infty$$

A határérték azért lett ∞ (és nem $-\infty$), mert bármilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén mind a nevező, mind a számláló pozitív, így a tört értéke is minden esetben pozitív.

Felhasználtuk továbbá, hogy ha létezik, akkor a határértékek összeadódnak, illetve hogy $a^n \rightarrow 0$, ha $|a| < 1$.

c. $\lim \frac{3^{2n+1} + 2^{n+2}}{2^{n+2} \cdot 5^{n+1}} = ?$

Megoldás:

$$\begin{aligned} \lim \frac{3^{2n+1} + 2^{n+2}}{2^{n+2} \cdot 5^{n+1}} &= \lim \frac{3 \cdot 3^{2n} + 2^2 \cdot 2^n}{2^2 \cdot 2^n \cdot 5 \cdot 5^n} = \lim \frac{3 \cdot (3^2)^n + 4 \cdot 2^n}{4 \cdot 2^n \cdot 5 \cdot 5^n} = \lim \frac{3 \cdot 9^n + 4 \cdot 2^n}{20 \cdot 2^n \cdot 5^n} \\ &= \lim \frac{3 \cdot 9^n + 4 \cdot 2^n}{20 \cdot (2 \cdot 5)^n} = \lim \frac{3 \cdot 9^n + 4 \cdot 2^n}{20 \cdot (10)^n} \end{aligned}$$

Innen már látszik, hogy a legnagyobb alapú tag a 10^n .

Tehát:

$$\lim \frac{3 \cdot 9^n + 4 \cdot 2^n}{20 \cdot (10)^n} = \lim \frac{3 \cdot \frac{9^n}{10^n} + 4 \cdot \frac{2^n}{10^n}}{20 \cdot \frac{10^n}{10^n}} = \lim \frac{3 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n + 4 \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^n}{20 \cdot \left(\frac{10}{10}\right)^n} = \frac{3 \cdot 0 + 4 \cdot 0}{20 \cdot 1} = \frac{0}{20} = 0$$

6. Számoljuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

a. $\lim \frac{n^3 2^n + 3^n}{2^{2n} - 3n^3}$

Megoldás:

A csak exponenciális és n hatvány tagokat tartalmazó törtkifejezések határértékének kiszámításakor alakítsuk az exponenciális tagokat azonos kitevőjűvé, majd egyszerűsítsünk a legnagyobb alapú exponenciális taggal. Ez után már használhatjuk, hogy $\frac{1}{n^k} \rightarrow 0$, ha $k > 0$, hogy $n^k a^n \rightarrow 0$, ha $|a| < 1$, illetve, hogy $a^n \rightarrow 0$ szintén ha $|a| < 1$.

$$\lim \frac{n^3 2^n + 3^n}{2^{2n} - 3n^3} = \lim \frac{n^3 2^n + 3^n}{4^n - 3n^3} = \lim \frac{n^3 \frac{2^n}{4^n} + \frac{3^n}{4^n}}{\frac{4^n}{4^n} - 3n^3 \frac{1}{4^n}} = \lim \frac{n^3 \left(\frac{2}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1^n - 3n^3 \left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{0 + 0}{1 - 0} = \frac{0}{1} = 0$$

7. Adjuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n^3 + 3}$

Megoldás:

Az $\sqrt[n]{n}$ hatványok típusú kifejezések határértékét általában rendőrelv felhasználásával tudjuk kiszámolni. Becsüljük a gyökjel alatti tagok mindegyikét a legkisebbel, illetve a legnagyobbval. Így egy alsó és felső becsléshez jutunk, melyek határértékét ki tudjuk számolni.

$$\sqrt[n]{3} \leq \sqrt[n]{2n^3 + 3} \leq \sqrt[n]{2n^3 + 3n^3} \leq \sqrt[n]{5n^3} = \sqrt[n]{5} \cdot (\sqrt[n]{n})^3$$

Használjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1$, ha $p > 0$, illetve $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n^3 + 3} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5} \cdot (\sqrt[n]{n})^3 = 1 \cdot 1^3 = 1$$

Tehát a rendőrelv miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n^3 + 3} = 1$.

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{27n^2 + 7n - 3}{8n^2 - 5n + 9}}$

Ez a feladat tulajdonképpen hasonló az előzőhöz, hiszen két polinom hányadosa szintén egy polinom. Itt is a rendőr elvet alkalmazhatjuk. Ne felejtsük el, hogy ha a nevezőt csökkentjük, akkor a tört értéke nő, míg ha a nevezőt növeljük, a tört értéke csökken.

Olyan tételt nem tanultunk (mert nincs), hogy kiszámolhatjuk a gyök alatti rész határértékét, majd mivel az egy pozitív szám, ennek n -dik gyöke tart az 1-hez!!!

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{27}{17}} &\leq \sqrt[n]{\frac{27n^2}{17n^2}} = \sqrt[n]{\frac{27n^2}{8n^2 + 9n^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{27n^2}{8n^2 + 9}} \leq \sqrt[n]{\frac{27n^2}{8n^2 - 5n + 9}} \leq \sqrt[n]{\frac{27n^2 + 7n - 3}{8n^2 - 5n + 9}} \\ &\leq \sqrt[n]{\frac{27n^2 + 7n}{8n^2 - 5n + 9}} \leq \sqrt[n]{\frac{27n^2 + 7n^2}{8n^2 - 5n}} \leq \sqrt[n]{\frac{27n^2 + 7n^2}{8n^2 - 5n^2}} = \sqrt[n]{\frac{34n^2}{3n^2}} = \sqrt[n]{\frac{34}{3}} \end{aligned}$$

Használjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1$, ha $p > 0$, így a becslés mindkét „vége” 1-hez tart, így a kezdeti határérték is 1.

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{27}{17}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{27n^2}{8n^2 - 5n + 9}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{34}{3}} = 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{27n^2}{8n^2 - 5n + 9}} = 1$$

8. Számoljuk ki az alábbi sorozat határértékét!

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25n! + n^{25}}{25n^n}$

Megoldás:

Ha több nagyságrendű tag is szerepel a törtkifejezésben, akkor a nagyságrendi sorrendben legerősebbel egyszerűsítsünk, majd használjuk ki a nagyságrendeket összehasonlító tételket. Ez jelen esetben a n^n .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25n! + n^{25}}{25n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25 \frac{n!}{n^n} + \frac{n^{25}}{n^n}}{25 \frac{n^n}{n^n}} = \frac{25 \cdot 0 + 0}{25} = \frac{0}{25} = 0$$

Kihasználtuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$ illetve, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{25}}{n^n} = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n^{25}} = \infty$.

9. Adjuk meg a következő sorozatok határértékét!

a. $\lim \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n = ?$

Megoldás:

$$\lim \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{-3}{n}\right)^n = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

Használjuk, hogy $\lim \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$.

b. $\lim \left(\frac{n+5}{n-2}\right)^n = ?$

Megoldás:

Ha $\left(\frac{\text{polinom}}{\text{polinom}}\right)^{\text{polinom}}$ esetben, ha a három polinom ugyanolyan fokú, illetve a főegyütthatójuk egyenlő, akkor próbáljuk olyan alakba átalakítani, hogy az $\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$ egy részsorozatának a határértékét kelljen kiszámolnunk.

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{n+5}{n-2}\right)^n &= \lim \left(\frac{n-2+7}{n-2}\right)^n = \lim \left(\frac{n-2}{n-2} + \frac{7}{n-2}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{7}{n-2}\right)^n \\ &= \lim \left(1 + \frac{7}{n-2}\right)^{n-2} \cdot \left(1 + \frac{7}{n-2}\right)^2 = \lim \left(1 + \frac{7}{n-2}\right)^{n-2} \cdot \left(1 + \frac{\frac{7}{n}}{\frac{n}{n}-\frac{2}{n}}\right)^2 \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a $\lim \left(1 + \frac{7}{n-2}\right)^{n-2}$ sorozat az $\left(1 + \frac{7}{n}\right)^n$ sorozat részsorozata (hiszen csak kettővel elvannak tolvá az elemei: az előbbi sorozat minden eleme egyenlő a második sorozat kettővel későbbi elemével), így nyilván a határértékük is megegyezik. A szorzat másik tényezőjének határértékét már korábban részletesen tárgyaltuk.

$$\lim \left(1 + \frac{7}{n-2}\right)^{n-2} \cdot \left(1 + \frac{\frac{7}{n}}{\frac{n}{n}-\frac{2}{n}}\right)^2 = e^7 \cdot \left(1 + \frac{0}{1-0}\right)^2 = e^7 \cdot 1^2 = e^7$$

c. $\lim \left(\frac{3n+5}{3n-4}\right)^{3n} = ?$

Megoldás:

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{3n+5}{3n-4}\right)^{3n} &= \lim \left(\frac{3n-4+9}{3n-4}\right)^{3n} = \lim \left(\frac{3n-4}{3n-4} + \frac{9}{3n-4}\right)^{3n} = \lim \left(1 + \frac{9}{3n-4}\right)^{3n} \\ &= \lim \left(1 + \frac{9}{3n-4}\right)^{3n-4} \cdot \left(1 + \frac{9}{3n-4}\right)^4 \\ &= \lim \left(1 + \frac{9}{3n-4}\right)^{3n-4} \cdot \left(1 + \frac{9 \cdot \frac{1}{n}}{\frac{3n}{n}-4 \cdot \frac{1}{n}}\right)^4 \end{aligned}$$

A $\lim \left(1 + \frac{9}{3n-4}\right)^{3n-4}$ sorozat az $\left(1 + \frac{9}{n}\right)^n$ sorozat részsorozata, így a határértékük is megegyezik.

$$\lim \left(1 + \frac{9}{3n-4}\right)^{3n-4} \cdot \left(1 + \frac{9 \cdot \frac{1}{n}}{\frac{3n}{n}-4 \cdot \frac{1}{n}}\right)^4 = e^9 \cdot \left(1 + \frac{9 \cdot 0}{3-4 \cdot 0}\right)^4 = e^9 \cdot 1^4 = e^9$$

Másik megoldás:

Egyszerűsítsük a törtet 3n-nel!

$$\lim \left(\frac{3n+5}{3n-4} \right)^{3n} = \lim \left(\frac{\frac{3n}{3n} + \frac{5}{3n}}{\frac{3n}{3n} - \frac{4}{3n}} \right)^{3n} = \lim \frac{\left(1 + \frac{5}{3n}\right)^{3n}}{\left(1 - \frac{4}{3n}\right)^{3n}} = \lim \frac{\left(1 + \frac{5}{3n}\right)^{3n}}{\left(1 + \frac{-4}{3n}\right)^{3n}}$$

Mivel mind a számláló részsorozata az $\left(1 + \frac{5}{n}\right)^n$ sorozatnak, míg a nevező részsorozata az $\left(1 + \frac{-4}{n}\right)^n$ sorozatnak.

$$\lim \frac{\left(1 + \frac{5}{3n}\right)^{3n}}{\left(1 + \frac{-4}{3n}\right)^{3n}} = \frac{e^5}{e^{-4}} = e^9$$

d. $\lim \left(\frac{n^2+3}{n^2+5} \right)^{n^2} = ?$

Megoldás:

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{n^2+3}{n^2+5} \right)^{n^2} &= \lim \left(\frac{n^2+5-2}{n^2+5} \right)^{n^2} = \lim \left(\frac{n^2+5}{n^2+5} - \frac{2}{n^2+5} \right)^{n^2} = \lim \left(1 - \frac{2}{n^2+5} \right)^{n^2} \\ &= \lim \left(1 + \frac{-2}{n^2+5} \right)^{n^2} = \lim \left(1 + \frac{-2}{n^2+5} \right)^{n^2+5} \cdot \left(1 + \frac{-2}{n^2+5} \right)^{-5} \\ &= \lim \left(1 + \frac{-2}{n^2+5} \right)^{n^2+5} \cdot \left(1 + \frac{-2 \cdot \frac{1}{n^2}}{n^2+5 \cdot \frac{1}{n^2}} \right)^{-5} = e^{-2} \cdot \left(1 + \frac{-2 \cdot 0}{1+5 \cdot 0} \right) = e^{-2} \cdot 1 \\ &= e^{-2} \end{aligned}$$

Másik megoldás:

$$\lim \left(\frac{n^2+3}{n^2+5} \right)^{n^2} = \lim \left(\frac{\frac{n^2}{n^2} + 3 \frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + 5 \frac{1}{n^2}} \right)^{n^2} = \lim \left(\frac{1 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{5}{n^2}} \right)^{n^2} = \lim \frac{\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{n^2}} = \frac{e^3}{e^5} = e^{-2}$$

e. $\lim \left(\frac{2n+7}{2n+3} \right)^{2n+5} = ?$

Megoldás

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{2n+7}{2n+3} \right)^{2n+5} &= \lim \left(\frac{\frac{2n}{2n} + 7 \frac{1}{2n}}{\frac{2n}{2n} + 3 \frac{1}{2n}} \right)^{2n} \cdot \left(\frac{2n}{2n} + 7 \frac{1}{2n} \right)^5 = \lim \frac{\left(1 + \frac{7}{2n}\right)^{2n}}{\left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{2n}} \cdot \left(\frac{1 + 7 \frac{1}{2n}}{1 + 3 \frac{1}{2n}} \right)^5 \\ &= \frac{e^7}{e^3} \cdot \left(\frac{1 + 7 \cdot 0}{1 + 3 \cdot 0} \right)^5 = e^4 \end{aligned}$$

Máshogy:

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{2n+7}{2n+3} \right)^{2n+5} &= \lim \left(\frac{2n+3+4}{2n+3} \right)^{2n+5} = \lim \left(\frac{2n+3}{2n+3} + \frac{4}{2n+3} \right)^{2n+5} \\ &= \lim \left(1 + \frac{4}{2n+3} \right)^{2n+3} \cdot \left(1 + \frac{4}{2n+3} \right)^2 \\ &= \lim \left(1 + \frac{4}{2n+3} \right)^{2n+3} \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot \frac{1}{n}}{2 \frac{n}{n} + 3 \cdot \frac{1}{n}} \right)^2 = e^4 \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot 0}{2 + 3 \cdot 0} \right)^2 = e^4 \cdot 1 = e^4 \end{aligned}$$

f. $\lim \left(\frac{6n+1}{4n+5} \right)^n = ?$

Megoldás:

Mivel a nevező és számláló legnagyobb kitevőjű tagjának nem egyforma az együtthatója, így nem fogjuk tudni „könnyen” $1 + \frac{1}{n}$ alakra hozni. Becsüljük tehát a kifejezést!

A jó becsléshez érdemes megsejteni, hogy mi lehet a határérték. Mivel $6n + 1 > 4n + 5$, így a tört értéke mindig egynél nagyobb, sőt egyre nagyobb, így az n -dik hatvány is egyre nagyobb lesz. Így sejtésünk legyen az, hogy a határérték végtelen. Így becsüljük a kifejezést alulról valamivel, aminek a határértékéről tudjuk, hogy végtelen. **VISZONT a sejtés nem bizonyítás! A fenti fejtegetés sem bizonyítás, ezt precízen be kell látni!**

$$\lim \left(\frac{6n+1}{4n+5} \right)^n \geq \lim \left(\frac{6n}{4n+5} \right)^n \geq^* \lim \left(\frac{6n}{4n+n} \right)^n \geq \lim \left(\frac{6n}{5n} \right)^n \geq \lim \left(\frac{6}{5} \right)^n = \infty$$

A * egyenlőtlenség azért teljesül, mert ha $n > 5$, akkor a nevező minden esetben nőtt, így a tört értéke csökkent. Vagyis a határérték legfeljebb akkora lehet, mint az előző.

Tehát: $\lim \left(\frac{6n+1}{4n+5} \right)^n \geq \infty \rightarrow \lim \left(\frac{6n+1}{4n+5} \right)^n = \infty$

g. $\lim \left(\frac{2n+2}{7n+3} \right)^n = ?$

Megoldás:

Az előbbi esettel ellentétben itt a nevező mindig nagyobb, mint a számláló, így a tört értéke mindig 1-nél kisebb. Így várhatóan nem lesz végtelen a határérték.

Emeljük ki a legnagyobb n hatványt a nevezőből, és a számlálóból is!

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{2n+2}{7n+3} \right)^n &= \lim \frac{(2n+2)^n}{(7n+3)^n} = \lim \frac{(2n)^n \left(\frac{2n}{2n} + 2 \cdot \frac{1}{2n} \right)^n}{(7n)^n \left(\frac{7n}{7n} + 3 \cdot \frac{1}{7n} \right)^n} = \lim \frac{(2n)^n}{(7n)^n} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{\left(1 + \frac{3}{7n} \right)^n} \\ &= \lim \left(\frac{2}{7} \right)^n \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{\left(1 + \frac{3}{7n} \right)^n} = 0 \cdot \frac{e}{e^{\frac{3}{7}}} = 0 \end{aligned}$$

h. $\lim \left(1 + \frac{3}{n} \right)^{n^2} = ?$

Megoldás:

Mivel a számlálóban levő n^2 és a zárójelben levő n nem azonos n hatványok, így nem fogjuk tudni az $\left(1 + \frac{a}{n} \right)^n$ sorozat egy részsorozataként felfogni. Megint becsülnünk kell!

$$\lim \left(1 + \frac{3}{n} \right)^{n^2} = \lim \left(\left(1 + \frac{3}{n} \right)^n \right)^n \geq^* \lim (2^3)^n = \lim 2^n \geq \lim 2^n = \infty$$

A * egyenlőtlenséget úgy kaptuk, hogy $\left(1 + \frac{3}{n} \right)^n$ határértéke e^3 , tehát a határérték definíciója miatt az $\left(1 + \frac{3}{n} \right)^n$ egy megfelelően nagy N küszöbindextől kezdve közelebb van az e^3 -höz, mint $e^3 - 2^3$.

Vagyis ettől a bizonyos N küszöbindextől kezdve az összes elem nagyobb, mint 2^3 . (Ez egy elég erős becslés, hiszen e „jóval” nagyobb, mint 2, és $e^3 \sim 20,1$ és $2^3 = 8$ szintén nincsenek közel egymáshoz. De a becslés működik, tehát nekünk épp megfelel.)

10. Határozzuk meg a számsorozat torlódási pontjait! $\overline{\lim} a_n = ?$, $\underline{\lim} a_n = ?$

a. $a_n = 2^{(-1)^n \cdot n}$

Megoldás:

Ha páros, akkor $(-1)^n = 1$, ha páratlan, akkor pedig $(-1)^n = -1$.

Tehát, ha n páros (vagyis $n = 2k$), akkor $\lim a_n = 2^n = \infty$. Továbbá, ha n páratlan (vagyis, $n = 2k + 1$) akkor $\lim a_n = 2^{-n} = -\infty$.

Tehát: $S = \{-\infty, \infty\}$; $\overline{\lim} a_n = \infty$; $\underline{\lim} a_n = -\infty$.

b. $a_n = \frac{n^2 + n^2 \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{2n^2 + n + 7}$

Megoldás:

- Ha n páros, akkor $\sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = 0$. Tehát:

$$\begin{aligned} \lim \frac{n^2 + n^2 \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{2n^2 + n + 7} &= \lim \frac{n^2}{2n^2 + n + 7} = \lim \frac{\frac{n^2}{n^2}}{2 \frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} + 7 \cdot \frac{1}{n^2}} = \lim \frac{1}{2 \cdot 1 + \frac{1}{n} + 7 \cdot \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{1}{2 + 0 + 7 \cdot 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Ha n 4-gyel osztva 1 maradékot ad, akkor $\sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = 1$. Tehát:

$$\begin{aligned} \lim \frac{n^2 + n^2 \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{2n^2 + n + 7} &= \lim \frac{n^2 + n^2}{2n^2 + n + 7} = \lim \frac{\frac{2n^2}{n^2}}{2 \frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} + 7 \cdot \frac{1}{n^2}} = \lim \frac{2}{2 \cdot 1 + \frac{1}{n} + 7 \cdot \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{2}{2 + 0 + 7 \cdot 0} = 1 \end{aligned}$$

- Ha pedig n 4-gyel osztva 3 maradékot ad, akkor $\sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = -1$. Tehát:

$$\begin{aligned} \lim \frac{n^2 + n^2 \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{2n^2 + n + 7} &= \lim \frac{n^2 - n^2}{2n^2 + n + 7} = \lim \frac{0}{2 \frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} + 7 \cdot \frac{1}{n^2}} = \lim \frac{0}{2 \cdot 1 + \frac{1}{n} + 7 \cdot \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{0}{2 + 0 + 7 \cdot 0} = 0 \end{aligned}$$

Tehát $S = \left\{\frac{1}{2}, 1, 0\right\}$, $\overline{\lim} a_n = 1$, $\underline{\lim} a_n = 0$.

c. $a_n = \frac{3^{2n+1} + (-4)^n}{5 + 9^{n+1}}$

Megoldás:

$$\begin{aligned} \lim \frac{3^{2n+1} + (-4)^n}{5 + 9^{n+1}} &= \lim \frac{3 \cdot 3^{2n} + (-4)^n}{5 + 9 \cdot 9^n} = \lim \frac{3 \cdot (3^2)^n + (-4)^n}{5 + 9 \cdot 9^n} = \lim \frac{3 \cdot 9^n + (-4)^n}{5 + 9 \cdot 9^n} \\ &= \lim \frac{3 \cdot \frac{9^n}{9^n} + \frac{(-4)^n}{9^n}}{5 \cdot \frac{1}{9^n} + 9 \cdot \frac{9^n}{9^n}} = \lim \frac{3 \cdot 1^n + \left(\frac{-4}{9}\right)^n}{5 \cdot \frac{1}{9^n} + 9 \cdot 1^n} = \frac{3 + 0}{5 \cdot 0 + 9} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a negatív alapú exponenciális tag csak akkor okoz problémát, ha épp az a legnagyobb abszolút értékű, hiszen ellenkező esetben az egyszerűsítés után egy 1-nél kisebb abszolút értékű (negatív) számot kapunk, melynek n -dik hatványa 0-hoz tart.

Tehát: $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$, $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = \lim a_n = \frac{1}{3}$

d. $a_n = \frac{(-4)^n + 3 \cdot 3^n}{1 + 4^n}$

Megoldás:

$$\lim \frac{(-4)^n + 3 \cdot 3^n}{1 + 4^n} = \lim \frac{\frac{(-4)^n}{4^n} + 3 \cdot \frac{3^n}{4^n}}{1 \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{4^n}{4^n}} = \lim \frac{(-1)^n + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 \cdot \frac{1}{4^n} + 1^n}$$

Itt épp az előző feladat végén említett probléma merül fel. Az $(-1)^n$ divergens. Ha n páros, akkor értéke 1, ha n páratlan értéke -1.

Tehát:

- ha n páros

$$\lim \frac{1 + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 \cdot \frac{1}{4^n} + 1^n} = \frac{1 + 3 \cdot 0}{1 \cdot 0 + 1} = 1$$

- ha n páratlan

$$\lim \frac{-1 + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 \cdot \frac{1}{4^n} + 1^n} = \frac{-1 + 3 \cdot 0}{1 \cdot 0 + 1} = -1$$

Tehát: $S = \{-1; 1\}$, $\underline{\lim} a_n = -1$ $\overline{\lim} a_n = 1$