

Polinom osztás – kiegészítő

A párhuzam kedvéért az egész számok körében a maradékos osztást a következőképp definiáljuk. Ha az f természetes számot elosztjuk egy g természetes számmal, akkor egy olyan q természetes számot kapunk maradékként, mely kisebb, mint f , illetve ha van, kapunk egy m maradékot, mely kisebb, mint g , és igaz rájuk, hogy $f = g \cdot q + m$. Az f osztható g -vel, ha a maradék 0.

Pl:

$$1534 : 6 = 255 \text{ hiszen } 1534 = 6 \cdot 255 + 4$$

Szintén a párhuzam kedvéért nézzük meg, hogy hogyan is végzünk el egy írásbeli osztást:

	$15'3'4 \quad : 6 = 25..$	$15'3'4' \quad : 6 = 255$
$15'34 : 6 = 2 \dots$	$\begin{array}{r} -(12) \\ \hline 33 \\ -(30) \\ \hline 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} -(12) \\ \hline 33 \\ -(30) \\ \hline 34 \\ -(30) \\ \hline 4 \end{array}$
$\begin{array}{r} -(12) \\ \hline 3 \end{array}$		

A polinomok körében – a természetes számokhoz hasonlóan – tudunk definiálni maradékos osztást. Ha az f polinomot elosztjuk a g polinommal, akkor egy olyan q polinomot kapunk eredményként, melynek fokszáma kisebb, mint az eredeti f polinomé, illetve (ha van) kapunk egy m maradék polinomot, melynek fokszáma kisebb, mint a g polinom fokszáma, és igaz rájuk, hogy $f = g \cdot q + m$. Azt mondjuk, hogy az f polinom osztható g -vel, ha a maradék 0.

Például $(x^3 + x^2 - 5x + 4) : (x + 3) = x^2 - 2x + 1$, hiszen $x^3 + x^2 - 5x + 4 = (x + 3) \cdot (x^2 - 2x + 1) + 1$

Ugyanazzal a módszerrel, amivel a természetes számok körében az írásbeli osztást elvégezzük, a polinomok körében is el tudjuk végezni az osztást.

A feni osztás részletesen:

$$\overbrace{(x^3 + x^2 - 5x + 4)}^{\text{osztandó}} : \overbrace{(x + 3)}^{\text{osztó}} = \overbrace{\dots}^{\text{hányados}}$$

Először a hányados első tagját határozzuk meg az alapján, hogy az osztót, mivel kell megszorozni, hogy az osztandó első tagjával megfelelő fokszámú és együtthatójú polinomot kapjunk. Jelen pillanatban tehát az a kérdés, hogy milyen taggal kell megszoroznunk $(x + 3)$ -at, hogy a főegyütthatója x^3 legyen. Ez természetesen az x^2 .

$$(x^3 + x^2 - 5x + 4) : (x + 3) = x^2 + \dots$$

Ez után „szorozzuk vissza”, hogy lássuk, milyen maradékkal kell tovább számolnunk. (csak úgy, mint a „sima” írásbeli osztásnál a természetes számok körében.)

$$\begin{array}{r} (x^3 + x^2 - 5x + 4) : (x + 3) = x^2 + \dots \\ x^3 + 3x^2 \end{array}$$

A visszaszorzott elemet kell kivonnunk az eredeti polinom megfelelő elemeiből. Így kapjuk meg hogy az első lépésben mi a maradék.

$$\begin{array}{r} (x^3 + x^2 - 5x + 4) : (x + 3) = x^2 + \dots \\ -(x^3 + 3x^2) \\ \hline -2x^2 \end{array}$$

Ezzel tehát el is jutottunk az első lépés végére. Az első lépés után a maradék tehát $-2x^2$. Ez után „hozzuk le” a következő tagot.

$$\begin{array}{r} (x^3 + x^2 - 5x + 4) : (x + 3) = x^2 + \dots \\ -(x^3 + 3x^2) \downarrow \\ \hline -2x^2 - 5x \end{array}$$

Tehát a $-2x^2 - 5x$ -et kell osztanunk az $(x + 3)$ -mal. Újfént figyeljünk csak a legnagyobb kitevőjű tagra. Tehát azt kell kitalálnunk, hogy mivel kell megszoroznunk az $(x + 3)$ -at, ahhoz, hogy a főtag $-2x^2$ legyen. Ez természetesen a $-2x$.

$$\begin{array}{r} (x^3 + x^2 - 5x + 4) : (x + 3) = x^2 - 2x + \dots \\ -(x^3 + 3x^2) \\ \hline -2x^2 - 5x \end{array}$$

Újfént „szorozzuk vissza” ezt az $(x + 3)$ -mal.

$$\begin{array}{r} (x^3 + x^2 - 5x + 4) : (x + 3) = x^2 - 2x + \dots \\ -(x^3 + 3x^2) \\ \hline -2x^2 - 5x \\ -2x^2 - 6x \end{array}$$

Ezt kell kivonnunk az eredeti polinomból.

$$\begin{array}{r} (x^3 + x^2 - 5x + 4) : (x + 3) = x^2 - 2x + \dots \\ -(x^3 + 3x^2) \\ \hline -2x^2 - 5x \\ -(-2x^2 - 6x) \\ \hline x \end{array}$$

Újfént „hozzuk le” a következő tagot.

$$\begin{array}{r} (x^3 + x^2 - 5x + 4) : (x + 3) = x^2 - 2x + \dots \\ -(x^3 + 3x^2) \\ \hline -2x^2 - 5x \\ -(-2x^2 - 6x) \downarrow \\ \hline x + 4 \end{array}$$

Megint az a feladat, hogy kitaláljuk, hogy az $(x + 3)$ -at mivel kell megszoroznunk, hogy olyan polinomot kapjunk, melynek főtagja x legyen. Nyilván valóan ez az 1. Szorozzuk is gyorsan vissza, majd vonjuk is ki.

$$\begin{array}{r} (x^3 + x^2 - 5x + 4) : (x + 3) = x^2 - 2x + 1 \\ -(x^3 + 3x^2) \\ \hline -2x^2 - 5x \\ -(-2x^2 - 6x) \\ \hline x + 4 \\ x + 3 \\ \hline 1 \end{array}$$

Tehát a hányadosunk $x^2 - 2x + 1$ a maradék pedig 1.

Néhány példa, már nem ennyire részletesen kidolgozva:

$$\begin{array}{r}
 (2x^3 + 36x^2 + 214x + 420) : (x + 7) = 2x^2 + 22x + 60 \\
 \underline{-(2x^3 + 14x^2)} \quad \downarrow \\
 22x^2 + 214x \\
 \underline{-(22x^2 + 154x)} \quad \downarrow \\
 60x + 420 \\
 \underline{-(60x + 420)} \\
 0
 \end{array}$$

$(2x^5 - 50x^2 - 30x^3 - 200x + 200) : (x + 5) = ?$ Figyeljünk mindig, hogy a polinomok a kitevők szerint csökkenő sorrendben legyenek, és ha valamelyik tag „hiányzik”, akkor az osztásnál vegyük 0 együtthatóval.

$$\begin{array}{r}
 (2x^5 + 0x^4 - 30x^3 + 50x^2 - 200x + 200) : (x + 5) = 2x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 50x + 50 \\
 \underline{-(2x^5 + 10x^4)} \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 -10x^4 - 30x^3 \\
 \underline{-(-10x^4 - 50x^3)} \quad \downarrow \\
 20x^3 + 50x^2 \\
 \underline{-(20x^3 + 100x^2)} \quad \downarrow \\
 -50x^2 - 200x \\
 \underline{-(-50x^2 - 250x)} \quad \downarrow \\
 50x + 200 \\
 \underline{-(50x + 250)} \\
 -50
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (2x^5 + 0x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 1) : (x^2 + x + 2) = 2x^3 - 2x^2 + x + 1 \\
 \underline{-(2x^5 + 2x^4 + 4x^3)} \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 -2x^4 - x^3 - 2x^2 \\
 \underline{-(-2x^4 - 2x^3 - 4x^2)} \quad \downarrow \\
 x^3 + 2x^2 - x \\
 \underline{-(x^3 + x^2 + 2x)} \quad \downarrow \\
 x^2 - 3x + 1 \\
 \underline{-(x^2 + x + 2)} \\
 -4x - 1
 \end{array}$$