Feladatok és megoldások a 10. hétre
Építőkari Matematika A3

1. Pisti nem tanult semmit a vizsgára, ahol 10 darab eldöntendő kérdésre kell válaszolnia. Az anyagból valami kicsi dereng, ezért kicsit több, mint 50%-os, mondjuk olyan 60%-os valószínűséggel ír jó választ egy-egy kérdésre. Milyen valószínűséggel megy át, ha a ketteshez 8 jó válasz kell?

2. Egy tesztrendszerű vizsgánál minden diáknak 20 kérdésre kell igennel vagy nemmel felelni. Tegyük fel, hogy egy vizsgázó az egyes kérdésekre egymástól függetlenül 0.7 valószínűséggel tudja a helyes választ, 0.1 valószínűséggel azt hiszi, hogy tudja a helyes választ, de téved, 0.2 valószínűséggel nem tudja a helyes választ, és ennek tudatában van. Ha a vizsgázó tudja, hogy egy kérdésre nem tudja a helyes választ, akkor találomra ír igent vagy nemet $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a vizsgázó legalább 19 kérdésre helyesen válaszol?

3. Egy 5 kérdéses feleletválasztós teszten, ahol mind az 5 kérdésben 3 lehetséges válasz közül kell a helyeset kiválasztani, mi a valószínűsége, hogy egy diák 4 vagy 5 helyes választ ad pusztán találgatással?

4. Egy kommunikációs csatorna 0 vagy 1 számjegyeket tud továbbítani. Sajnos a hálózati zavarok miatt minden számjegy továbbításába (egymától függetlenül) 0.2 valószínűséggel hiba csúszik. Tegyük fel, hogy egy fontos 0–1 információt szeretnénk a csatornán átküldeni. Hogy a hiba esélyét csökkentsük, a 0 helyett 00000-t küldünk, és az 1 helyett 11111-et küldünk, a vételi oldalon pedig „többségi értelmezést” alkalmazunk. Mi a valószínűsége, hogy ilyen módon az adatátvitelbe hiba csúszik?

5. Egy rozsomák elindul a számegyenes origójából. Minden lépésnél 1/2 valószínűséggel jobbra, 1/2 valószínűséggel balra lép, az előző lépéseitől függetlenül. 20 lépés megtétele után
   (a) Milyen valószínűséggel lesz a 0-ban?
   (b) Milyen valószínűséggel lesz az 1-ben?
   (c) Milyen valószínűséggel lesz a (-2)-ben?
   (d) Milyen valószínűséggel lesz a (-2)-ben, ha az utolsó előtti lépés után a (-3)-ban volt?

6. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni őket egymástól. A cinkelt érme 3/4 valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, 1/2 eséllyel az igazságosat, 1/2 eséllyel a cinkeltet. A kiválasztott érmét feldobom 30-szor, és azt tapasztalom, hogy 25-ször mutatott fejet. Mi a valószínűsége, hogy a cinkelt érmét vettem elő?

7. Az A érme feldobásakor 0.4 valószínűséggel kapunk fejet, a B érme feldobásakor ugyanez a valószínűség 0.7. E két érme közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk, és 10-szer feldobunk.
   (a) Függetlenek-e e dobások kimenetelei egymástól?
   (b) Mi a valószínűsége, hogy pontosan 7 dobás lesz fej?
   (c) Feltéve, hogy az első dobás fej, mi a valószínűsége, hogy az A érmével dobunk?
   (d) Feltéve, hogy az első dobás fej, mi a valószínűsége, hogy összesen 7 dobás lesz fej?

8. Egy cég mágneslemezeinek 1%-a hibás. A cég e lemezeket 10-es csomagokban árulja, és visszavásárlási garanciát vállal arra az esetre, ha egy dobozban egynél több a hibás lemez.

(a) Mi a valószínűsége, hogy egy adott dobozban egynél több lesz a hibás lemez?

(b) Ha valaki 3 doboz lemezt vásárol, mi a valószínűsége, hogy pontosan 1 dobozt fog garanciával visszavásároltatni?

9. Egy újságárus 100 forintért veszi, és 150 forintért adja el az újság darabját. Viszont az el nem adott újságokat nem tudja visszavinni. Ha az újság napi kereslete binomiális eloszlású valószínűségi változó $n = 10$ és $p = 1/3$ paraméterekkel, akkor hány újságot érdemes naponta beszerezni, hogy az újságárus maximalizálja a várható hasznát?

10. Egy országban közelítőleg 80 000 házasságkötés történt a tavalyi év során. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy e 80 000 pár közül legalább egyre igaz, hogy

    (a) a pár mindkét tagja április 30-án született,

    (b) a pár két tagja ugyanazon a napon ünnepli a születésnapját.

    Milyen feltevésekkel éltünk?

11. Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhuba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több, mint egy sajtóhuba van?

12. Átlagosan hány mazsolának kell egy sütiben lennie, ha azt kívánjuk elérni, hogy egy véletlenszerűen választott sütiben legalább 0.99 valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

13. A kocogj velünk mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen.

14. A roulette keréken 38 szám van: 1-től 36-ig, 0, és dupla 0. Ha Kovács úr mindig arra fogad, hogy az eredmény 1-től 12-ig terjed, mi a valószínűsége, hogy

    (a) Kovács úr elveszti mind az 5 első fogadását,

    (b) először a negyedik fogadáson nyer?

15. Egy urnában 4 fehér és 4 fekete golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk 4 golyót. Ha közülük kettő fehér és kettő fekete, akkor megállunk, egyébként visszatesszük a golyókat, és újra húzunk négy golyót. Ezt folytatjuk egészen addig, amíg a négy kihúzott golyóból pontosan kettő lesz fehér. Mi a valószínűsége, hogy pontosan n-szer húzunk?

16. Egy dobókockával addig dobunk, míg 6-ost nem dobunk. Mennyi lesz a dobásaink számának várható értéke? És ha két kockával dobunk addig, amíg valamelyiken 6-ost nem dobunk?

17. Egy dobókockával addig dobunk, amíg kétszer egymás után ugyanazt nem dobjuk. Mennyi a dobások számának várható értéke?

18. 100 kulcsunk közül csak 1 nyitja az előttünk lévő ajtót. A sötétben nem látjuk, hogy melyik kulcsot próbáltuk már ki, így a próbálgatások során többször is kezünkbe kerülhet ugyanaz a kulcs. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozással kinyitjuk az ajtót? És ha a kipróbált kulcsokat félretesszük?

19. Legyen X geometriai eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg számolás útján, hogy

$$\mathbb{P}\{X = n + k \mid X > n\} = \mathbb{P}\{X = k\}. \tag{1}$$

A geometriai eloszlás értelmezése alapján indokoljuk meg szóban is, hogy ez az egyenlőség miért igaz.

20. Blicc úr minden nap villamossal megy dolgozni, de nincs bérlete, sem jegye. A villamosra minden nap 0.2 valószínűséggel száll fel ellenőr, és ilyenkor 0.95 valószínűséggel elkapja Blicc urat. (Az ellenőr minden nap az addigiaktól függetlenül dönti el, ellenőrzi-e aznap Blicc úr villamosát.)

    (a) Mennyi a valószínűsége, hogy Blicc úrnak „szerencsés hete” van, azaz az 5 munkanap egyikén sem kell büntetést fizetnie?
    (b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan kétszer kapják el egy hét munkanapjai alatt?
    (c) Feltéve, hogy Blicc úrnak szerencsés hete volt, mi a valószínűsége, hogy mind az ötször volt ellenőr a villamoson?
    (d) Mi a valószínűsége, hogy csütörtökön büntetik meg először?

21. Egy országban az öngyilkosságok gyakorisága havonta és 100 000 lakosonként átlagosan egy öngyilkosság.

    (a) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az ország egy 400 000-res városában 8 vagy több öngyilkosság történik egy adott hónapban.
    (b) Mi a valószínűsége, hogy lesz legalább 2 olyan hónap az évben, amikor a városban 8 vagy több öngyilkosság történik?
    (c) Ha folyó hót számoljuk az 1. hónapnak, mi a valószínűsége, hogy az első olyan hónap amikor 8 vagy több öngyilkosság történik a városban az i-edik hónap lesz, $i \geq 1$?

Eredmények

1. Legyen X a jó válaszok száma, mely egy binomiális valószínűségi változó $n = 10, p = 0.6$ paraméterekkel. A válasz

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X \geq 8\} &= \mathbb{P}\{X = 8\} + \mathbb{P}\{X = 9\} + \mathbb{P}\{X = 10\} \\ &= \binom{10}{8} \cdot 0.6^8 \cdot 0.4^2 + \binom{10}{9} \cdot 0.6^9 \cdot 0.4^1 + \binom{10}{10} \cdot 0.6^{10} \cdot 0.4^0 \simeq 0.167.\end{aligned}$$

3.

$$\binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \simeq 0.045.$$

4. Az információt hibásan kapjuk, ha az ötből legalább három bit megsérült. Ennek esélye

$$\binom{5}{3} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^2 + \binom{5}{4} \cdot 0.2^4 \cdot 0.8^1 + \binom{5}{5} \cdot 0.2^5 \cdot 0.8^0 \simeq 0.058.$$

5.(a) Akkor és csak akkor lesz a 0-ban, ha a 20 lépése közül pontosan 10 volt balra lépés, és 10 jobbra lépés. Ennek esélye $\binom{20}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \simeq 0.176$.

(b) Páros számú lépés után csak páros pozícióban lehet, ezért a válasz nulla.

(c) A (-2)-ben akkor lesz, ha pontosan 11-szer lépett balra, és 9-szer jobbra. Ennek valószínűsége $\binom{20}{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \simeq 0.160$.

(d) Ha az utolsó előtti lépés után (-3)-ban volt, akkor $\frac{1}{2}$ eséllyel lép egyet jobbra, a (-2)-be.

6. Legyen X a dobott fejek száma, {C} pedig az az esemény, hogy a cinkelt érmével dobtam. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{C \mid X = 25\} &= \frac{\mathbb{P}\{X = 25 \mid C\} \cdot \mathbb{P}\{C\}}{\mathbb{P}\{X = 25 \mid C\} \cdot \mathbb{P}\{C\} + \mathbb{P}\{X = 25 \mid C^c\} \cdot \mathbb{P}\{C^c\}} \\ &= \frac{\binom{30}{25} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{25} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \frac{1}{2}}{\binom{30}{25} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{25} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} + \binom{30}{25} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{25} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3^{25}}{3^{25} + 2^{30}} \simeq 0.9987.\end{aligned}$$

Általánosan, 25 helyett n fejet dobva ($0 \leq n \leq 30$) a keresett valószínűség így alakul:

$$\mathbb{P}\{C \mid X = n\} = \frac{3^n}{3^n + 2^{30}}.$$

A függvény grafikonján $n = 19$ környékén a feltételes valószínűségben egy elég éles átmenet látható.

7. Legyen X a dobott fejek száma, F az az esemény, hogy az első dobás fej, A és B pedig azon események, hogy a megfelelő érméket választottuk ki.

(b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X = 7\} &= \mathbb{P}\{X = 7 \mid A\} \cdot \mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{X = 7 \mid B\} \cdot \mathbb{P}\{B\} \\ &= \binom{10}{7} \cdot 0.4^7 \cdot 0.6^3 \cdot \frac{1}{2} + \binom{10}{7} \cdot 0.7^7 \cdot 0.3^3 \cdot \frac{1}{2} \simeq 0.155.\end{aligned}$$

(c)

$$\mathbb{P}\{A \mid F\} = \frac{\mathbb{P}\{FA\}}{\mathbb{P}\{F\}} = \frac{\mathbb{P}\{F \mid A\} \cdot \mathbb{P}\{A\}}{\mathbb{P}\{F \mid A\} \cdot \mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{F \mid B\} \cdot \mathbb{P}\{B\}} = \frac{0.4 \cdot \frac{1}{2}}{0.4 \cdot \frac{1}{2} + 0.7 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{11} \simeq 0.364.$$

(a) Egy fej dobás erősíti a gyanút, hogy a B érmét használjuk, mely viszont növeli az esélyét a következő fej dobásnak. Ezért a dobások nem függetlenek. Lássunk erre egy számolást:

Az előző kifejezés nevezőjéből $\mathbb{P}\{F\} = 0.55$, azaz bármely rögzített dobás 55% eséllyel lesz fej. Azonban ha már tudjuk, hogy az első dobás fej, az (c) szerint módosítja annak valószínűségét, hogy melyik érmét használjuk: $\mathbb{P}\{A \mid F\} = 4/11$, $\mathbb{P}\{B \mid F\} = 7/11$. Ezért annak valószínűsége, hogy a második dobás fej lesz (jelöljük ezen eseményt F_2-vel), ha az első fej lett,

$$\mathbb{P}\{F_2 \mid F\} = \mathbb{P}\{F_2 \mid A\} \cdot \mathbb{P}\{A \mid F\} + \mathbb{P}\{F_2 \mid B\} \cdot \mathbb{P}\{B \mid F\} = 0.4 \cdot \frac{4}{11} + 0.7 \cdot \frac{7}{11} = \frac{13}{22} \simeq 0.591.$$

Tehát az első dobás fej volta a második dobás fej kimenetelének valószínűségét 0.55-ről 0.591-re növelte; a dobások nem függetlenek.

A függetlenség helyett az ún. *feltételes függetlenség* igaz: feltéve, hogy az A érmével dobunk, a dobások függetlenek. Hasonlóan, feltéve, hogy a B érmével dobunk, a dobások függetlenek. A feltétel nélkül azonban nincs függetlenség.

(d) Ha már tudjuk, hogy az első dobás fej, az (c) szerint módosítja annak valószínűségét, hogy melyik érmét használjuk: $\mathbb{P}\{A \mid F\} = 4/11$, $\mathbb{P}\{B \mid F\} = 7/11$. Az első dobás után hátra van még 9 dobásunk, melyből $Y = 6$-nak kell fejnek lennie. Ennek valószínűsége

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Y = 6\} &= \mathbb{P}\{Y = 6 \mid A\} \cdot \mathbb{P}\{A \mid F\} + \mathbb{P}\{Y = 6 \mid B\} \cdot \mathbb{P}\{B \mid F\} \\ &= \binom{9}{6} \cdot 0.4^6 \cdot 0.6^3 \cdot \frac{4}{11} + \binom{9}{6} \cdot 0.7^6 \cdot 0.3^3 \cdot \frac{7}{11} \simeq 0.197.\end{aligned}$$

8.(a) Legyen X az egy dobozban található hibás lemezek száma. Ekkor X binomiális eloszlású valószínűségi változó, $n = 10$ és $p = 0.01$ paraméterekkel. A doboz visszaküldhető, ha $X > 1$. Ennek valószínűsége

$$\mathbb{P}\{X > 1\} = 1 - \mathbb{P}\{X = 0\} - \mathbb{P}\{X = 1\} = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0.01^1 \cdot 0.99^9 \simeq 0.00427.$$

(b) A dobozok egymástól függetlenül lesznek visszaküldhetők, a fenti valószínűséggel. Ezért a válasz

$$\binom{3}{1} \cdot 0.00427^1 \cdot [1 - 0.00427]^2 \simeq 0.0127.$$

9. Jelöljük a beszerzett újságok számát m-mel, az eladott újságok számát X-szel, a keresletet Y-nal. Ekkor

$$X = \begin{cases} Y, & \text{ha } Y < m, \\ m, & \text{ha } Y \geq m. \end{cases}$$

Mivel Y binomiális eloszlású $n = 10$ és $p = 1/3$ paraméterekkel, X súlyfüggvénye a következő:

$$p(i) = \mathbb{P}\{X = i\} = \begin{cases} \mathbb{P}\{Y = i\} = \binom{10}{i} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-i} & \text{, ha } i < m, \\ \mathbb{P}\{Y \geq m\} = \sum_{j=m}^{10} \binom{10}{j} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^j \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-j} & \text{, ha } i = m. \end{cases}$$

Az újságárus költsége $100 \cdot m$ forint, bevétele $150 \cdot X$ forint, várható nyeresége tehát

$$N = \mathbb{E}(150 \cdot X - 100 \cdot m) = 150 \cdot \mathbb{E}(X) - 100 \cdot m.$$

$\mathbb{E}(X)$ meghatározásához felhasználjuk a fenti súlyfüggvényt:

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=0}^{m} i\cdot p(i)=\sum_{i=0}^{m-1} i\cdot\binom{10}{i}\cdot\Big(\frac{1}{3}\Big)^{i}\cdot\Big(\frac{2}{3}\Big)^{10-i}+m\cdot\sum_{j=m}^{10}\binom{10}{j}\cdot\Big(\frac{1}{3}\Big)^{j}\cdot\Big(\frac{2}{3}\Big)^{10-j}.$$

Adott m-re ez a formula egy konkrét számot ad, mellyel a várható nyereség kiszámolható (kalkulátorral, vagy pl. számítógépes matematikai rendszerrel). Az eredmények:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	0	47.4	81.79	86.92	53.03	-15	-103.52	-200.57	-300.06	-400	-500

A legnagyobb várható nyereséget tehát 3 újság rendelése adja.

10. Feltesszük, hogy a hazasulandók mindegyike egymástól függetlenül született az év bármely napján (szökőévekkel nem foglalkozunk).

(a) Annak valószínűsége, hogy egy adott pár mindkét tagja április 30-án született $p=1/365^2\simeq 7.51\cdot 10^{-6}$. Az ilyen párok X száma tehát binomiális eloszlású, $n=80\,000$ és az előbbi p paraméterekkel. A keresett valószínűség

$$\mathbb{P}\{X\geq 1\}=1-\mathbb{P}\{X=0\}=1-\binom{80\,000}{0}\cdot\Big(\frac{1}{365^2}\Big)^{0}\cdot\Big(1-\frac{1}{365^2}\Big)^{80\,000}\simeq 0.451.$$

A számolás sokat egyszerűsödik, ha észrevesszük, hogy paramétereink alapján a helyzet a Poisson közelítés tartományában van: n nagy, p pici, és a kettő szorzata $\lambda=np=80\,000/365^2\simeq 0.6$. Ezért X eloszlása Poisson eloszlással közelíthető:

$$\mathbb{P}\{X\geq 1\}=1-\mathbb{P}\{X=0\}\simeq 1-\mathrm{e}^{-0.6}\simeq 0.451,$$

három tizedes jegyig megegyezik a binomiális valószínűséggel.

(b) Annak valószínűsége, hogy egy adott pár mindkét tagja ugyanazon a napon ünnepli a születésnapját, $1/365$. Az ilyen párok Y száma most binomiális, $n=80\,000$, $p=1/365$ paraméterű változó lesz. Továbbra is igaz, hogy $n>>\lambda=np$, így a Poisson közelítés itt is alkalmazható. A fenti valószínűségek ebben az esetben:

$$\mathbb{P}\{Y\geq 1\}=1-\mathbb{P}\{Y=0\}=1-\binom{80\,000}{0}\cdot\Big(\frac{1}{365}\Big)^{0}\cdot\Big(1-\frac{1}{365}\Big)^{80\,000}\simeq 1-4.8\cdot 10^{-96},$$

azaz $=1$. Poisson közelítéssel $\lambda=np=80\,000/365\simeq 219.2$,

$$\mathbb{P}\{Y\geq 1\}=1-\mathbb{P}\{Y=0\}=1-\mathrm{e}^{-219.2}\simeq 1-6.49\cdot 10^{-96},$$

azaz $=1$.

13. Az egy versenyzőben talált kullancsok X száma Poisson eloszlású, valamilyen ismeretlen λ paraméterrel. Ha n versenyző indult, akkor a megadott adatok alapján közelítőleg $\mathbb{P}\{X=1\}\simeq 300/n$ és $\mathbb{P}\{X=2\}\simeq 75/n$. A Poisson súlyfüggvény segítségével tehát meg kell oldanunk az

$$\begin{aligned}\frac{\lambda^1}{1!}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda}&\simeq\frac{300}{n}\\ \frac{\lambda^2}{2!}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda}&\simeq\frac{75}{n}\end{aligned}$$

egyenletrendszert. A második egyenletet elosztva az elsővel $\lambda/2\simeq 1/4$, azaz $\lambda\simeq 1/2$. Ezért az első egyenlet szerint $n\simeq 300\cdot\mathrm{e}^{\lambda}/\lambda\simeq 989$.

14. Kovács úr $p=12/38=6/19$ eséllyel nyeri minden fogadását. Ezért

(a) $(1-p)^5 = \left(\frac{13}{19}\right)^5$,

(b) $(1-p)^3 \cdot p = \left(\frac{13}{19}\right)^3 \cdot \frac{6}{19}$.

15. Egy húzásnál annak valószínűsége, hogy pontosan két fehér golyó lesz $p = \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} / \binom{8}{4} = \frac{18}{35}$. Annak valószínűsége, hogy n-szer húzunk a geometriai eloszlás szerint $(1-p)^{n-1} \cdot p = 17^{n-1} \cdot 18/35^n$.

16. Egy kockával dobva a dobások száma geometriai eloszlású, $p = 1/6$ paraméterrel. A dobások számának várható értéke $1/p = 6$.
Két kockával valamelyiken 6-ost dobunk akkor és csak akkor, ha nem igaz az, hogy mindkét kocka 6-ostól különbözőt mutat, azaz $p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 11/36$ valószínűséggel. A dobások száma most geometriai eloszlású ezzel a paraméterrel, várható értéke $1/p = 36/11$.

17. Az első dobás kivételével minden dobásnál függetlenül 1/6 eséllyel dobjuk azt, amit az előző dobásnál. Ezért az első dobás utáni dobásaink száma geometriai eloszlású $p = 1/6$ paraméterrel, várható értéke 6. Az első dobással együtt várhatóan 7-et fogunk dobni.

18. Feltesszük, hogy a kulcsok próbálgatását függetlenül és minden kulcsnak egyenlő esélyt adva végezzük. Ekkor minden próbánál $1/100$ valószínűséggel leszünk sikeresek. Az első 50 próbálkozás *nem* sikerül, ha 50-szer nem a megfelelő kulcs akad a kezünkbe. Ennek esélye $\left(\frac{99}{100}\right)^{50}$, a válasz tehát a komplementer esemény valószínűsége, $1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{50} \simeq 0.395$.
Ha a kipróbált kulcsokat félretesszük, akkor legfeljebb 50 próbálkozásra kinyitjuk az ajtót, ha a kulcsok véletlen kipróbálási sorrendjében a megfelelő kulcs benne volt az első 50-ben. Mivel a véletlen sorrendben ez a kulcs bárhol egyenlő eséllyel lehet, a valószínűség most $50/100 = 0.5$.

19. A feladat nyilván $k > 0$ egészekre értelmes, ellenkező esetben az egyenlőség mindkét oldala nulla. $k > 0$-ra

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X = n+k \,|\, X > n\} &= \frac{\mathbb{P}\{X = n+k \text{ és } X > n\}}{\mathbb{P}\{X > n\}} = \frac{\mathbb{P}\{X = n+k\}}{\mathbb{P}\{X > n\}} \\ &= \frac{(1-p)^{n+k-1} \cdot p}{(1-p)^n} = (1-p)^{k-1} \cdot p = \mathbb{P}\{X = k\}.\end{aligned}$$

Itt felhasználtuk a geometriai eloszlás súlyfüggvényét, és azt, hogy $\mathbb{P}\{X > n\}$, annak valószínűsége, hogy az első n kísérlet *nem* sikerül, megegyezik $(1-p)^n$-nel.
A szóbeli indoklás a következő: tegyük fel, hogy az első n kísérlet közül egy sem sikerült. Ez pontosan a baloldali feltételes valószínűség feltétele. Az egyenlőség bal oldala e feltétel mellett annak valószínűsége, hogy innentől számolva a k-dik kísérlet lesz először sikeres. A kísérletek függetlensége miatt ez a feltétel nyilván nem számít, és a feltételes valószínűség megegyezik annak valószínűségével, hogy ha elkezdjük a kísérleteket, az első sikert a k-dik kísérletnél látjuk. Ez utóbbi valószínűség szerepel a jobb oldalon.
Az (1) egyenlet a geometriai eloszlás *örökifjú tulajdonságát* fejezi ki: az a feltétel, hogy még nem jött el a siker ideje, nem ad semmilyen információt arról, hogy hány további kísérletet kell végeznünk az első sikeres kísérletig, ez a véletlen szám ugyanolyan, mintha a kísérleteket újrakezdtük volna.

20. Blicc urat minden nap egymástól függetlenül $p = 0.2 \cdot 0.95 = 0.19$ valószínűséggel büntetik meg. Az öt nap alatti büntetéseinek száma binomiális eloszlású a fenti p és $n = 5$ paraméterekkel. Ezért

(a) $\mathbb{P}\{X = 0\} = \binom{5}{0} \cdot 0.19^0 \cdot 0.81^5 \simeq 0.349$.

(b) $\mathbb{P}\{X = 2\} = \binom{5}{2} \cdot 0.19^2 \cdot 0.81^3 \simeq 0.192$.

(c) Legyen E az az esemény, hogy mind az ötször volt ellenőr a villamoson, F az az esemény, hogy Blicc úrnak szerencsés hete volt. Ekkor $\mathbb{P}\{EF\} = \mathbb{P}\{F \mid E\} \cdot \mathbb{P}\{E\}$ annak valószínűsége, hogy mind az ötször volt ellenőr, de Blicc úr mind az ötször megúszta a büntetést, $\mathbb{P}\{F\}$-et pedig az (a) részben kiszámoltuk:

$$\mathbb{P}\{E \mid F\} = \frac{\mathbb{P}\{F \mid E\} \cdot \mathbb{P}\{E\}}{\mathbb{P}\{F\}} \simeq \frac{0.05^5 \cdot 0.2^5}{0.349} \simeq 2.87 \cdot 10^{-10}.$$

(d) A hét első három napján Blicc úr nem kapott büntetést, a negyedik napon kapott. Ennek valószínűsége $(1-p)^3 \cdot p = 0.81^3 \cdot 0.19 \simeq 0.101$.

21. Feltesszük, hogy a lakosok egymástól függetlenül, az év bármely időszakában egyforma valószínűséggel lesznek öngyilkosok.

(a) A 400 000-res városban várhatóan 4 öngyilkosság történik havonta, ezért az öngyilkosságok X száma Poisson eloszlású $\lambda = 4$ paraméterrel.

$$p := \mathbb{P}\{X \geq 8\} = 1 - \sum_{j=0}^{7} \mathbb{P}\{X = j\} = 1 - \sum_{j=0}^{7} \frac{4^j}{j!} \cdot \mathrm{e}^{-4} \simeq 0.0511.$$

(b) Az ilyen hónapok Y száma az évben binomiális eloszlású a fenti p és $n = 12$ paraméterekkel.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Y \geq 2\} &= 1 - \mathbb{P}\{Y = 0\} - \mathbb{P}\{Y = 1\} \\ &= 1 - \binom{12}{0} \cdot 0.0511^0 \cdot (1 - 0.0511)^{12} - \binom{12}{1} \cdot 0.0511^1 \cdot (1 - 0.0511)^{11} \simeq 0.123.\end{aligned}$$

(c) Az első ilyen hónap sorszáma egy Z geometriai eloszlású változó, a fenti p paraméterrel.

$$\mathbb{P}\{Z = i\} = (1-p)^{i-1} \cdot p = (1 - 0.0511)^{i-1} \cdot 0.0511.$$

Feladatok és megoldások a 11. heti gyakorlathoz
diszkrét várható érték
Építőkari Matematika A3

1. Egy versenyen öt női és öt férfi versenyző indul. Tegyük fel, hogy nincs két azonos eredmény, és mind a 10! sorrend egyformán valószínű. Legyen X a legjobb női versenyző helyezése. (Például ha $X = 1$, akkor nő lett a verseny győztese.) Határozzuk meg X súlyfüggvényét, azaz a $\mathbb{P}\{X = i\}$ valószínűségeket, $i = 1, 2, \ldots, 10$.

2. Az X valószínűségi változó súlyfüggvénye $p(i) = \frac{i^2}{30}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Határozzuk meg X várható értékét.

3. Albert és Béla a következőt játszák: Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd Albert annyi forintot kap Bélától amennyi a két kockán levő pontok különbségének a négyzete. Béla meg annyit kap Alberttől, amennyi a két kockán levő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék?

4. Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000 Ft-os, 10 darab 50 000 Ft-os, és 100 darab 5 000 Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000 darab sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának felével egyezzen meg?

5. Tételezzük fel a 700 Ft, 10 000 Ft, 789 ezer Ft, és 535 millió Ft fix nyereményeket a lottón. 150 Ft-os jegyárral számolva mekkora az egy lottószelvényen várható nyereségünk?

6. Anna és Béla két kockával játszanak. Anna akkor fizet Bélának, ha mindkét feldobott kockán páratlan szám szerepel. Béla akkor fizet Annának, ha pontosan egy kockával páros számot dobnak. Ha más eset fordul elő, egyikük sem fizet. Milyen pénzösszegben állapodjanak meg, hogy a játék méltányos legyen?

7. Legyen X egy dobókockával dobott szám. Mennyi X várható értéke és szórása? Mi a helyzet n oldalú "kocka" esetén?

8. Egy iskolakirándulás során négy busz szállítja adiákokat. A négy buszban 40, 33, 25, illetve 50 diák utazik. Vétlenszerűen kiválasztunk egy diákot, legyen X az ő buszában utazó összes tanuló száma. A négy buszsofőr közül szintén egyet véletlenszerűen kiválasztunk, legyen Y az ő buszán utazó tanulók száma.
   (a) Mit gondolunk, $\mathbb{E}(X)$ vagy $\mathbb{E}(Y)$ lesz nagyobb? Miért?
   (b) Számoljuk ki $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(Y)$ értékét.
   (c) Számoljuk ki X és Y szórását.

9. Egy dobozból, amiben 4 piros és 6 fehér golyó van, visszatevés nélkül kihúzok 3 golyót. Jelölje X a kihúzott piros golyók számát. Határozzuk meg X eloszlását, várható értékét, és szórását.

10. Véletlenszerűen elhelyezünk egy huszárt egy üres sakktáblára. Mennyi a lehetséges lépései számának a várható értéke? (A 8×8-as sakktábla (i, j) négyzetén álló huszár egy lépésben az $(i+1, j+2)$, $(i-1, j+2)$, $(i-2, j+1)$, $(i-2, j-1)$, $(i-1, j-2)$, $(i+1, j-2)$, $(i+2, j-1)$, $(i+2, j+1)$ mezőkre léphet, amennyiben ezek még a sakktáblán találhatóak.)

11. Két kockával dobva, mennyi a dobott számok nagyobbikának illetve kisebbikének várható értéke?

12. Egy 1-től 10-ig véletlenszerűen kiválasztott számot kell kitalálnunk, igen-nem kérdésekkel. Számítsuk ki, hogy várhatóan hány kérdésre van szükségünk a következő esetekben:

    (a) Az i-edik kérdésünk a következő: "A szám i?", $i = 1, 2, \ldots, 10$.

    (b) Minden egyes kérdéssel megpróbáljuk kizárni a lehetséges számok felét, amennyire ez csak lehetséges. Például az első kérdésünk "A szám nagyobb, mint 5?". Ha igen, a második kérdésünk "A szám nagyobb, mint 7?", stb.

13. Ha $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg a következő mennyiségeket:

    (a) $\mathbb{E}[(2 + X)^2]$,

    (b) $\mathbb{D}^2(4 + 3X)$.

14. Legyen X egy valószínűségi változó μ várható értékkel és σ szórással. Határozzuk meg

$$Y := \frac{X - \mu}{\sigma}$$

    várható értékét és szórását.

15. Hány véletlenszerűen kiválasztott emberre van ahhoz szükség, hogy közülük legalább egynek legalább 1/2 valószínűséggel ugyanaznap legyen a születésnapja, mint nekem?

Eredmények

1. Nyilván nulla a valószínűség, ha $i > 6$.
<u>Sorrend nélkül:</u> Ha a csak a versenyzők nemét nézzük, akkor mind a $\binom{10}{5}$ lehetséges elrendezés egyforma valószínű. Ezek közül meg kell számolnunk, hány elrendezés esetén lesz férfi az első $i-1$ helyen, azután pedig egy nő. Másszóval meg kell számolnunk hányféleképpen rendezhető el 4 nő és $5-(i-1) = 6-i$ férfi az első nő mögötti $10-i$ helyre. A válasz $\binom{10-i}{4}$, és a keresett valószínűség

$$\frac{\binom{10-i}{4}}{\binom{10}{5}} = \frac{(10-i)! \cdot 5! \cdot 5!}{10! \cdot 4! \cdot (6-i)!} = \frac{(10-i)! \cdot 5 \cdot 5!}{10! \cdot (6-i)!}.$$

<u>Sorrenddel:</u> Ebben az esetben minden versenyzőt különbözőnek tekintünk. Meg kell számonunk, hogy a 10! lehetőségből hány olyan sorrend van, ahol az első $i-1$ helyen férfi van, az i-dik helyen pedig nő. Az első $i-1$ helyre $5!/[5-(i-1)]! = 5!/(6-i)!$ féleképp válogathatunk sorrendben férfiakat (ismétlés nélküli variáció). Ezután jön 5 lehetőség az i-dik hely női versenyzőjének kiválasztására, majd a maradék $10-i$ helyre $(10-i)!$ féleképpen rendezhetjük el a versenyzőket. A keresett valószínűség tehát

$$\frac{5! \cdot 5 \cdot (10-i)!}{(6-i)! \cdot 10!}.$$

A válasz tehát $i = 1, 2, 3, 4, 5$ és 6 esetén $1/2,\ 5/18,\ 5/36,\ 5/84,\ 5/252,\ 1/252$.

2.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} i \cdot p(i) = \sum_{i=1}^{4} \frac{i^3}{30} = \frac{1^3}{30} + \frac{2^3}{30} + \frac{3^3}{30} + \frac{4^3}{30} = \frac{10}{3}.$$

3. Legyen X a két kockán levő pontok különbségének négyzete. Ekkor X súlyfüggvénye $p(0) = 1/6,\ p(1) = 10/36,\ p(4) = 8/36,\ p(9) = 6/36,\ p(16) = 4/36,\ p(25) = 2/36$, várható értéke

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 4 \cdot \frac{8}{36} + 9 \cdot \frac{6}{36} + 16 \cdot \frac{4}{36} + 25 \cdot \frac{2}{36} = \frac{210}{36} = \frac{35}{6}.$$

Hasonlóan, Y a két kockán levő pontok összege, súlyfüggvénye $p(2) = p(12) = 1/36,\ p(3) = p(11) = 2/36,\ p(4) = p(10) = 3/36,\ p(5) = p(9) = 4/36,\ p(6) = p(8) = 5/36,\ p(7) = 6/36$, várható értéke 7=42/6. Béla tehát hosszú távon jobban jár.

4. A nyeremény várható értéke

$$\frac{1}{40\,000} \cdot 1\,000\,000\,\mathrm{Ft} + \frac{10}{40\,000} \cdot 50\,000\,\mathrm{Ft} + \frac{100}{40\,000} \cdot 5\,000\,\mathrm{Ft} = 50\,\mathrm{Ft},$$

a jegyet tehát 100 Ft-ért kell árulni.

5. A várható nyeremény

$$\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} \cdot 700 + \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} \cdot 10\,000 + \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} \cdot 789\,000 + \frac{1}{\binom{90}{5}} \cdot 535\,000\,000 \simeq 43.\underline{^{66}}\,\mathrm{Ft}.$$

Ha a jegyár 150 Ft, akkor várhatóan $106.\underline{^{34}}$ Ft-ot vesztünk szelvényenként.

6 Anna $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/4$ eséllyel fizet Bélának, Béla pedig $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/2$ eséllyel fizet Annának. A játék méltányos, ha Anna kétszer annyit fizet, mint Béla, pl. 2 petákot, míg Béla 1 petákot.

7 n oldalú "kocka" esetén X súlyfüggvénye $p(i) = 1/n$, $i = 1, 2, \ldots n$. A számtani sor összegképletével

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot p(i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

A szóráshoz a második momentum is kell, ehhez felhasználjuk a négyzetszámok összegére vonatkozó képletet:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} i^2 \cdot p(i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{2n^2+3n+1}{6}.$$

A szórás ezek segítségével

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2} = \sqrt{\frac{2n^2+3n+1}{6} - \frac{n^2+2n+1}{4}} = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}.$$

Kocka eseén $n = 6$, $\mathbb{E}(X) = 7/2$, $\mathbb{D}(X) = \sqrt{35/12}$.

8.(a) Nagyobb eséllyel választunk egy diákot egy tömöttebb buszról, míg a sofőr választásakor minden busz egyenlő valószínű. Ezért X várhatóan nagyobb lesz Y-nál.

(b) X súlyfüggvényét felhasználva

$$\mathbb{E}(X) = 40\cdot\frac{40}{148} + 33\cdot\frac{33}{148} + 25\cdot\frac{25}{148} + 50\cdot\frac{50}{148} \simeq 39.28.$$

Y egyenlő eséllyel veszi föl bármelyik megadott létszám értékét,

$$\mathbb{E}(Y) = 40\cdot\frac{1}{4} + 33\cdot\frac{1}{4} + 25\cdot\frac{1}{4} + 50\cdot\frac{1}{4} = 37.$$

(c) A szóráshoz meghatározzuk a második momentumokat:

$$\mathbb{E}(X^2) = 40^2\cdot\frac{40}{148} + 33^2\cdot\frac{33}{148} + 25^2\cdot\frac{25}{148} + 50^2\cdot\frac{50}{148} \simeq 1625.4,$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = 40^2\cdot\frac{1}{4} + 33^2\cdot\frac{1}{4} + 25^2\cdot\frac{1}{4} + 50^2\cdot\frac{1}{4} = 1453.5.$$

A szórások

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)^2]} \simeq \sqrt{1625.4 - 39.28^2} \simeq 9.06,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \sqrt{\mathbb{E}(Y^2) - [\mathbb{E}(Y)^2]} \simeq \sqrt{1453.5 - 37^2} \simeq 9.19.$$

9. X súlyfüggvénye:

$$p(0) = \frac{\binom{4}{0}\cdot\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6}, \quad p(1) = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{2}, \quad p(2) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}, \quad p(3) = \frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{30}.$$

Ezek alapján

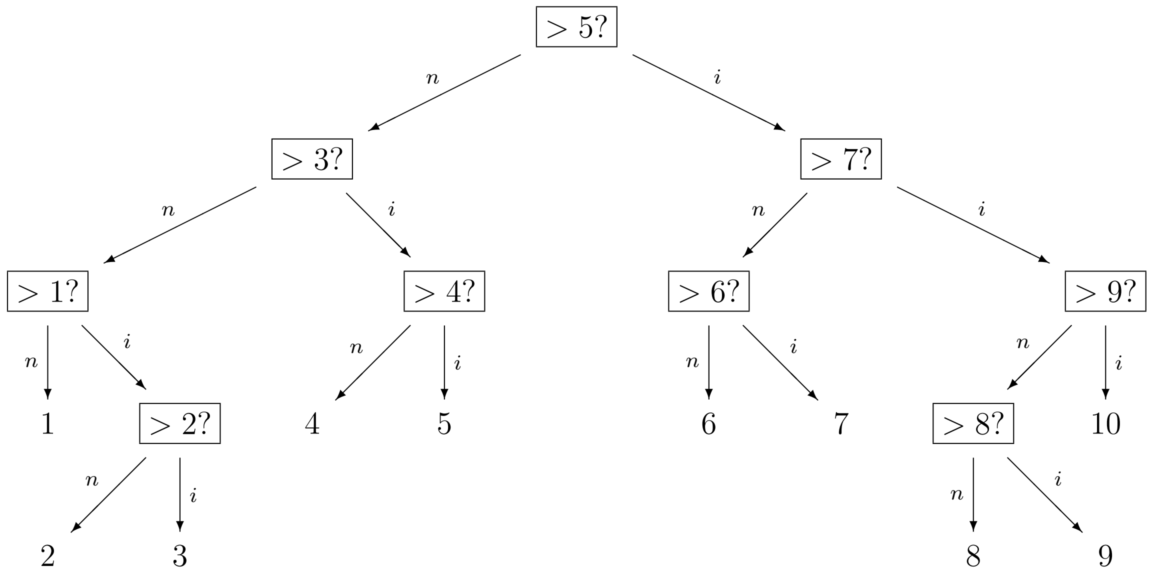
$$\mathbb{E}(X) = 0\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{3}{10} + 3\cdot\frac{1}{30} = \frac{6}{5},$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2\cdot\frac{1}{6} + 1^2\cdot\frac{1}{2} + 2^2\cdot\frac{3}{10} + 3^2\cdot\frac{1}{30} = 2,$$

$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2} = \sqrt{2 - [6/5]^2} = \sqrt{14}/5.$

12.(a) Legyen X a véletlen szám. A módszerünk szerint annyi kérdésre van szükség amennyi az X értéke. Ezért a válasz $\mathbb{E}(X) = 5.5$.

(b) Legyen a stratégiánk a következő:



Az első kérdésünk az, hogy a szám nagyobb-e, mint 5. Ennél, és a további kérdéseknél mindig próbáljuk megfelezni a lehetőségeket. Három kérdés szükséges akkor és csak akkor, ha a véletlen szám $1, 4, 5, 6, 7$, vagy 10 (azaz 6/10 valószínűséggel), négy kérdés szükséges akkor és csak akkor, ha a véletlen szám $2, 3, 8$, vagy 9 (4/10 valószínűséggel). A kérdések várható száma ezért $3 \cdot \frac{6}{10} + 4 \cdot \frac{4}{10} = \frac{17}{5} = 3.4$. 1 től 10-ig terjedő véletlen számnál a két módszer várható időtartama nem különbözik számottevően, azonban nagy véletlen számoknál a (b) módszer lényegesen gyorsabban működik.

13.(a) $\mathbb{E}[(2+X)^2] = \mathbb{E}(4)+\mathbb{E}(4X)+\mathbb{E}(X^2) = 4+4\mathbb{E}(X)+\mathbb{D}^2(X)+[\mathbb{E}(X)]^2 = 4+4\cdot 1+5+1^2 = 14.$

(b) A szórásnégyzet esetén az additív konstans nem számít, a multipliktaív konstans pedig négyzetesen jön ki a szórásnégyzet alól. Ezért $\mathbb{D}^2(4+3X) = 3^2 \cdot \mathbb{D}^2(X) = 9 \cdot 5 = 45$.

14.

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\Big(\frac{1}{\sigma} \cdot X - \frac{\mu}{\sigma}\Big) = \frac{1}{\sigma} \cdot \mathbb{E}(X) - \frac{\mu}{\sigma} = 0,$$
$$\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{D}^2\Big(\frac{1}{\sigma} \cdot X - \frac{\mu}{\sigma}\Big) = \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{D}^2(X) = 1,$$

ezért $\mathbb{D}(Y) = 1$. Y-t az X változó *standardizáltjának* hívjuk.

15. Annak valószínűsége, hogy n ember közül eggyel sem közös a szülinapom $\big(\frac{364}{365}\big)^n$ (szökőéveket nem számolva). Annak valószínűsége, hogy legalább eggyel közös a szülinapom, $1 - \big(\frac{364}{365}\big)^n$. Ezért keresem azt az n-et, melyre

$$\begin{aligned} 1 - \Big(\frac{364}{365}\Big)^n &\geq \frac{1}{2} \\ \Big(\frac{364}{365}\Big)^n &\leq \frac{1}{2} \\ n \cdot \log_2\Big(\frac{364}{365}\Big) &\leq -1 \\ n &\geq \frac{1}{\log_2(365) - \log_2(364)} \simeq 252.7, \end{aligned}$$

azaz legalább 253 ember szükséges.