Függvény határérték összefoglalás

Függvény határértéke:

Def: **Függvény**: egyértékű reláció. (Vagyis minden értelmezési tartománybeli elemhez, egyértelműen rendelünk hozzá egy elemet az értékkészletből. Vagyis $x \mapsto y$ függvény esetén x-hez pontosan egy y tartozhat.) Jelölés: értelmezési tartomány (ÉT): D_f; értékkészlet (ÉK): R_f ; $f: D_f \to R_f$
Def: Az f **felülről korlátos**, ha létezik egy $K \in \mathbf{R}$ valós szám, hogy $f(x) \leq K$ minden $x \in D_f$ esetén.
Def: Az f **alulról korlátos**, ha létezik egy $K \in \mathbf{R}$ valós szám, hogy $f \geq -K$ minden $x \in D_f$ esetén.
Def: Az f **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos,vagyis ha létezik egy $K \in \mathbf{R}$ valós szám, hogy $K \geq f \geq -K$ minden $x \in D_f$ esetén.
Def: Az f **monoton nő**, ha bármilyen $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$. **Szigorúan** monoton nő, ha az egyenlőség sehol nem teljesül, vagyis $f(x_1) < f(x_2)$. $(x_1, x_2 \in D_f)$
Def: Az f **monoton csökken**, ha bármilyen $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$. **Szigorúan** monoton csökken, ha az egyenlőség sehol nem teljesül, vagyis $f(x_1) > f(x_2)$. $(x_1, x_2 \in D_f)$
Def: Az f **periodikus** (p periódussal), ha van egy olyan p, melyre $f(x) = f(x+p)$ bármely $x \in D_f$ esetén.
Def: Az f **páros**, ha bármely $x \in D_f$ esetén $f(x) = f(-x)$. (Koordináta rendszerben ábrázolva tehát a függvény tükrös az y tengelyre.)
Def: Az f **páratlan**, ha bármely $x \in D_f$ esetén $f(x) = -f(-x)$. (Koordináta rendszerben ábrázolva tehát a függvény tükrös az origóra.)

Def: Az $x_0 \in \mathbf{R}$ pont a $H \subset \mathbf{R}$ halmaz **torlódási pontja**, ha x_0 bármely környezete a H végtelen sok elemét tartalmazza.
Def: Azt mondjuk, hogy a $\lim_{x \to a} f(x) = A$, ha

1. a torlódási pontja a D_f-nek. (vagyis az a nem izolált pont)
2. Bármilyen (kicsi) $\varepsilon > 0$ esetén van egy olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy
$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \ \text{ minden } x \in D_f \ \text{ esetén}$$
Vagyis ha az x az a egy kicsi (δ) sugarú (pontozott) környezetében van, akkor az $f(x)$ a határérték egy kicsi (ε) sugarú környezetében van.

Def: **Jobb és bal oldali határértéket** úgy értelmezhetünk, ha a határérték definíciójában nem minden $x \in D_f$ esetén nézzük a feltétel teljesülését, csak az a-nál nagyobb illetve kisebb értékekre.
Megjegyzés: Az értelmezési tartomány egy belső pontjában tehát csak akkor lehet a függvénynek határértéke, ha a bal és jobb oldali határértéke megegyezik.
Tétel **(Cauchy-kritérium)**: A függvény határértéke az a pontban A, vagyis $\lim_{x \to a} f(x) = A$, akkor és csak akkor, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy ha x_1, x_2 az a δ sugarú (pontozott) környezetében van akkor $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.
Tétel **(Átviteli elv)**: A függvény határértéke az a pontban A, akkor és csak akkor, ha minden a-hoz tartó x_n sorozat esetén $f(x_n) -> A$.

Végtelenben vett határérték:
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad \text{ha } \ \forall\, \varepsilon > 0 \ \text{ esetén van } P(\varepsilon) > 0, \text{hogy } |f(x) - A| < \varepsilon, \ \text{ ha } x > P(\varepsilon)$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \quad \text{ha } \ \forall\, \varepsilon > 0 \ \text{ esetén van } P(\varepsilon) > 0, \text{hogy } |f(x) - A| < \varepsilon, \ \text{ ha } x < -P(\varepsilon)$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \text{ha } \ \forall\, \Omega > 0 \ \text{ esetén van } P(\Omega) > 0, \text{hogy } f(x) > \Omega, \quad \text{ ha } x > P(\Omega)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ha} \quad \forall\, \Omega > 0 \quad \text{esetén van } P(\Omega) > 0, \text{hogy } f(x) < -\Omega, \qquad \text{ha } x > P(\Omega)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad \text{ha} \quad \forall\, \Omega > 0 \quad \text{esetén van } P(\Omega) > 0, \text{hogy } f(x) > \Omega, \qquad \text{ha } x < -P(\Omega)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ha} \quad \forall\, \Omega > 0 \quad \text{esetén van } P(\Omega) > 0, \text{hogy } f(x) < -\Omega, \qquad \text{ha } x < -P(\Omega)$$

Tétel: Ha $\lim_{x\to a} \mathrm{f(x)} = \mathrm{A} \in \mathbf{R}$ és $\lim_{x\to a} f(x) = B \in \mathbf{R}$, akkor

$$\lim_{x\to a} cf(x) = cA$$

$$\lim_{x\to a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B$$

$$\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \qquad \text{ha } B \neq 0$$

$$\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$$

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |A|$$

Ha $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, akkor $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

Ha $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, akkor $\lim_{x\to a} \frac{1}{|f(x)|} = \infty$

Tétel: Ha $f(x), g(x)$ olyanok, hogy minden x esetén $f(x) \leq g(x)$, akkor $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.

Tétel: (rendőrelv/szendvics szabály, stb…) Ha $f(x), g(x)$és $h(x)$ olyanok, hogy minden x esetén $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, továbbá tudjuk, hogy $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$, akkor $\lim_{x\to a} g(x)$ is ugyanannyi.

Tétel (nevezetes határértékek):

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0, & ha\ |a| < 1 \\ 1, & ha\ a = 1 \\ \infty, & ha\ a > 1 \\ divergens\ egyébként & \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^k = \infty, \qquad \text{ha } k \geq 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0\,, \quad \text{ha } k \geq 1$$

$$\lim_{x\to\infty} x^k a^x = 0, ha\ |a| < 1 és\ k \in \mathbf{N}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{p} = 1, \qquad ha\ p > 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^x}{x!} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x!}{2^x} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^k} = \infty \qquad k \geq 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^l}{x^{\frac{1}{k}}} = \infty \qquad k, l \geq 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{k}}}{\log x} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

<u>Folytonosság:</u>

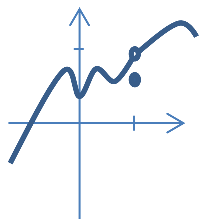
Def: Az f **az a pontban folytonos**, ha $f(a)$ létezik, és minden $\varepsilon > 0$ esetén van egy olyan $\delta(\varepsilon)$, hogy $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, ha $|x - a| < \delta$.

Vagyis f folytonos az a pontban, ha a függvényérték létezik, továbbá létezik az $\lim_{x\to a} f(x)$ és ez a kettő megegyezik.

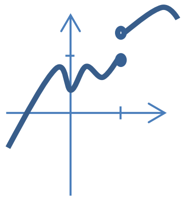
<u>Szakadási helyek osztályozása:</u>

Ha az f az értelmezési tartomány egy belső a pontjában nem folytonos, akkor a szakadási hely lehet:

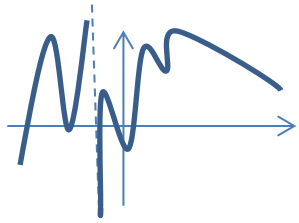
1. **Elsőfajú szakadás:**
   - **Megszüntethető:** ha a bal és jobb oldali határérték az a pontban véges és megegyezik, azonban ez nem egyenlő a függvényértékkel, vagy pedig a függvényérték nem létezik.



- **Véges ugrás:** a bal és jobb oldali határérték is létezik és véges, de ezek nem egyeznek meg.



2. **Másodfajú szakadás (lényeges szakadás):**
   - Minden más.



Folytonos függvények tulajdonságai:

Tétel: Bármely valós együtthatós polinom miden pontban folytonos.

Tétel: Racionális törtfüggvény (polinom/polinom típusú függvény) mindenütt folytonos, kivéve a nevezőben levő polinom gyökhelyeit, ahol a függvény nincs értelmezve.

Tétel: $\sin x$ és $\cos x$ mindenütt folytonosak.

Def: Egy **f folytonos $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$-n**, ha minden $x \in (a, b)$ pontban folytonos, és f folytonos $[a, b]$-n, ha folytonos (a, b) −n és az a-ban jobbról, b-ben balról folytonos.

Tétel **(Bolzano)**: Ha f folytonos $[a, b]$-ben, akkor minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső c értéket felvesz az $[a, b]$ intervallumon.

Következmény: Ha f folytonos $[a, b]$ intervallumon és $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelű, akkor az $f(x) = 0$ egyenletnek legalább egy gyöke van az (a, b) intervallumon. Vagyis páratlan fokszámú polinomnak legalább egy valós gyöke van.

Tétel **(Weierstrass I.)**: Ha f folytonos $[a, b]$-ben, akkor ott f korlátos.

Tétel **(Weierstrass II.)**: Ha f folytonos $[a, b]$-ben, akkor ott f felveszi az infimumát és szuprémumát, tehát van minimuma és maximuma.

Mintapéldák:

1. A definíció segítségével bizonyítsuk az alábbi határértéket!
   a. $\lim_{x\to 1} 3x + 4 = 7$

   Tehát keressük, hogy 1-nek milyen sugarú környezetét kell vennünk, hogy az alábbi egyenlőtlenség fennálljon:
$$|f(x) - A| = |3x + 4 - 7| < \varepsilon$$
   Ezt átalakítani:
$$|f(x) - A| = |3x + 4 - 7| = |3x - 3| = 3|x - 1| < \varepsilon \qquad \to \qquad |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$$
   Mivel x az 1-hez tart, ezért $\frac{\varepsilon}{3} = \delta$ pont jó lesz.

   b. $\lim_{x\to -2} \frac{8-2x^2}{x+2}$=8

   Újfent keressük, hogy -2 milyen környezetét kell vennünk ahhoz, hogy
$$\left|\frac{8 - 2x^2}{x + 2} - 8\right| = \left|\frac{8 - 2x^2}{x + 2} - \frac{8x + 16}{x + 2}\right| = \left|\frac{8 - 2x^2 - 8x - 16}{x + 2}\right| = \left|\frac{-2x^2 - 8x - 8}{x + 2}\right|$$
$$= \left|\frac{-2(x^2 + 4x + 4)}{x + 2}\right| = \left|\frac{-2(x + 2)^2}{x + 2}\right| = |-2(x + 2)| = 2|(x + 2)| < \varepsilon$$
   Tehát $|x + 2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Vagyis $\frac{\varepsilon}{2} = \delta$ épp jó lesz.

c. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2x}{x+3}=-2$

$$|f(x)-A|=\left|\frac{1-2x}{x+3}+2\right|=\left|\frac{1-2x+2x+6}{x+3}\right|=\left|\frac{1-2x+2x+6}{x+3}\right|=\left|\frac{7}{x+3}\right|<\varepsilon$$

Vagyis $|x+3|>\frac{7}{\varepsilon}$. Mivel $x\to\infty$, így a bal oldal pozitív, tehát az abszolút érték elhagyható. Tehát $x>\frac{7}{\varepsilon}-3$. Ez pont megfelel a definícióban szereplő $P(\varepsilon)$ –nak.

d. $\lim_{x\to-3}\sqrt{1-5x}=4$ Adjuk meg az $\varepsilon=10^{-2}$-hez tartozó δ-t!

$$\left|\sqrt{1-5x}-4\right|=\left|\left(\sqrt{1-5x}-4\right)\cdot\frac{\sqrt{1-5x}+4}{\sqrt{1-5x}+4}\right|=\left|\frac{(\sqrt{1-5x}-4)\cdot(\sqrt{1-5x}+4)}{\sqrt{1-5x}+4}\right|=\left|\frac{(1-5x)-16}{\sqrt{1-5x}+4}\right|=\frac{|-5x-15|}{\sqrt{1-5x}+16}=$$
$$\frac{|-5(x+3)|}{\sqrt{1-5x}+16}=\frac{5|(x+3)|}{\sqrt{1-5x}+16}\le\frac{5|x+3|}{0+4}<\varepsilon$$

Vagyis $|x+3|<\frac{4\varepsilon}{5}$. Ez pont jó lesz δ-nak. Mivel $\varepsilon=10^{-2}$, ezért $\delta=\frac{4\cdot 0{,}01}{5}=\frac{4}{500}$. Tehát az $\frac{1}{125}$ sugarú kört kell választani a -3 körül, hogy a függvényérték a 16 0,01 sugarú környezetében legyen.

2. Számítsuk ki a határértéket! ($\pm\infty$ -ben vett határérték)

a. $\lim_{x\to-\infty}x^9+4x^6+1$

$$\lim_{x\to-\infty}x^9+4x^6+1=\lim_{x\to\infty}(-x)^9+4(-x)^6+1=\lim_{x\to\infty}-(x)^9+4(x)^6+1=-\infty$$

Ha $x\to-\infty$, akkor értelemszerűen $-x\to\infty$. Tehát egy végtelenben vett határértéket számolhatunk.

b. $\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1+2x}$

$$\infty=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{2}\cdot x^{\frac{1}{3}}\le\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1+2x}$$

A függvényeknél is működő speciális rendőrelvet használtuk fel.

c. $\lim_{x\to\infty}\frac{6x+1}{3-2x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x+1}{3-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{3}{x}-\frac{2x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{1}{x}}{\frac{3}{x}-2}=\frac{6+0}{0-2}=-3$$

d. $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+3x}-2x$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+3x}-2x=\lim_{x\to\infty}\sqrt{4\cdot(-x)^2+3\cdot(-x)}-2\cdot(-x)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{4x^2-3x}+2x$$
$$\ge\lim_{x\to\infty}\sqrt{4x^2}+2x\ =\infty$$

Először írjuk át végtelenbe tartó határértékre. A becslés után természetesen az összeg mindkét tagja végtelenhez tart. Így az eredeti függvényhatárérték is végtelen.

e. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{4x^2+3x}-2x$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{4x^2+3x}-2x=\lim_{x\to\infty}\sqrt{4x^2+3x}-2x\cdot\frac{\sqrt{4x^2+3x}+2x}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x-4x^2}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\frac{x}{x}}{\sqrt{4\frac{x^2}{x^2}+3\frac{x}{x^2}}+2\frac{x}{x}}=\frac{3}{\sqrt{4}+2}=\frac{3}{4}$$

f. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-1}\right)^{5x-1}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-1}\right)^{5x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{4}{3x}}{1-\frac{1}{3x}}\right)^{5x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{4/3}{x}}{1-\frac{1/3}{x}}\right)^{5x}\cdot\left(\frac{1+\frac{4/3}{x}}{1-\frac{1/3}{x}}\right)^{-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{4/3}{x}\right)^{x}}{\left(1-\frac{1/3}{x}\right)^{x}}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1+\frac{4/3}{x}}{1-\frac{1/3}{x}}\right)^{-1}=\frac{e^{\frac{4}{3}}}{e^{-\frac{1}{3}}}\cdot 1=e^{3}$$

3. Számítsd ki a határértéket! (Végesben vett határérték)

a. $\lim_{x\to 3}\frac{5x^2-45}{x+3}$

Racionális törtfüggvény mindenütt folytonos, kivéve a nevező gyökeiben. Az $x+3=0$ gyöke a -3. Tehát a 3-ban folytonos a függvényünk. Szintén tudjuk, hogy egy függvény folytonos pontjában a függvényérték megegyezik a pontbeli határértékkel.

$$\lim_{x\to 3}\frac{5x^2-45}{x+3}=\frac{5\cdot 3^2-45}{3+3}=\frac{0}{6}$$

b. $\lim_{x\to -3}\frac{5x^2-45}{x+3}$

Racionális törtfüggvény mindenütt folytonos, kivéve a nevező gyökeiben. Az $x+3=0$ gyöke a -3. Ha az előző módszert alkalmazzuk, akkor $0/0$ jön ki, mellyel nem tudunk mit kezdeni. Azonban ha a -3-at behelyettesítve a számlálóban és a nevezőben is 0-t kapunk, az azt jelenti, hogy mindkettőnek gyöke, így $(x+3)$-mal lehet egyszerűsíteni.

$$\lim_{x\to -3}\frac{5x^2-45}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{5(x^2-9)}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{5(x-3)(x+3)}{x+3}=\lim_{x\to -3}5(x-3)$$

Ez viszont már egy folytonos függvény, így a pontbeli határértékét kiszámolhatjuk behelyettesítéssel.

$$\lim_{x\to -3}\frac{5x^2-45}{x+3}=\lim_{x\to -3}5(x-3)=5(-3-3)=-30$$

c. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}+3}{\sqrt{4+x}-2}$

A gyökfüggvény folytonos. Folytonos függvények hányadosa is folytonos, kivéve ott, ahol a nevező értéke 0. A nevező épp a 0-ban 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}+3}{\sqrt{4+x}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}+3}{\sqrt{4+x}-2}\cdot\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{9+x}+3\right)\cdot\left(\sqrt{4+x}+2\right)}{4+x-4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{(9+x)(4+x)}+3\sqrt{4+x}+2\sqrt{9+x}+6}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+13x+36}+3\sqrt{4+x}+2\sqrt{9+x}+6}{x}=\frac{\sqrt{36}+3\sqrt{2}+2\sqrt{9}+6}{0}$$

Tudjuk, hogy ez vagy végtelen, vagy mínusz végtelen. Ha x helyére egy 0-nál nagyobb számot helyettesítünk, akkor a határérték pozitív, ellenkező esetben negatív. Eszerint:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{9+x}+3}{\sqrt{4+x}-2}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{9+x}+3}{\sqrt{4+x}-2}=-\infty$$

d. $\lim_{x\to 3} 2+5\{x\}$

A törtrész függvény nem folytonos! Ezért ha a 3-hoz alulról illetve felülről tartunk más eredményt fogunk kapni.

$$\lim_{x\to 3^+} 2+5\{x\} = 2+5\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 3^+} 2+5\{x\} = 2+5\cdot 1 = 7$$

e. $\lim_{x\to 2} 3-[x+1]$

Az egészrész függvény sem folytonos! Ha 2-höz balról illetve jobbról tartunk különböző értéket kapunk.

$$\lim_{x\to 2^+} 3-[x-1] = 3-1 = 2$$

$$\lim_{x\to 2^+} 3-[x-1] = 3-0 = 3$$

4. Hol és milyen szakadási helyei vannak az alábbi függvények?

a. $f(x) = \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2(x+3)}$

Racionális törtfüggvénynek a nevező gyökeiben van szakadási helye. (itt nincs értelmezve a függvény. A nevező gyökei az $x=0$ és $x=-3$. Ezek alapján ebben a két pontban kell a függvény határértékét vizsgálnunk.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2(x+3)} = \frac{3}{0}$$

Ha a nevezőbe egy nullához közeli, nullánál nagyobb számot helyettesítünk, akkor pozitív lesz. A számláló szintén. Ha azonban egy nullához közeli, negatív számot helyettesítünk, akkor a számláló és a nevező is pozitív. Így

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2(x+3)} = +\infty$$

Tehát a szakadási helyen az legalább az egyik oldali határérték végtelen, így a szakadási hely másodfajú.

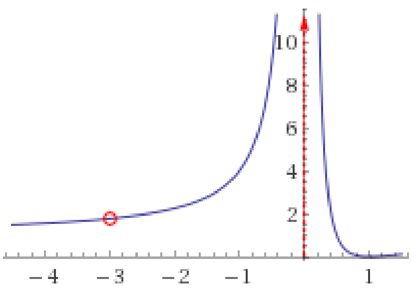
$$\lim_{x\to -3} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2(x+3)} = \frac{-27+9+15+3}{9\cdot(-3+3)} = \frac{0}{0}$$

A $0/0$ típusú határértékkel így nem tudnunk mit kezdeni. Azonban az, hogy a számláló és a nevező is nulla, ha $x=-3$, az azt jelenti, hogy a -3 gyöke mind a számlálónak, mind a nevezőnek. Tehát mindekét polinomból kiemelhető az $(x+3)$.

(polinomosztás!-részletesen lásd külön)

$$
\begin{array}{l}
(x^3+x^2-5x+3) : (x+3) = x^2-2x+1 \\
\underline{-(x^3+3x^2)} \\
\quad -\boldsymbol{2x^2} - 5x \\
\quad \underline{-(-2x^2-6x)} \\
\qquad\quad x+3 \\
\qquad\quad \underline{x+3} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$\lim_{x\to -3} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2(x+3)} =$
$\lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(x^2-2x+1)}{x^2(x+3)} = \lim_{x\to -3} \frac{x^2-2x+1}{x^2} =$
$\frac{(-3)^2-2\cdot(-3)+1}{(-3)^2} = \frac{9+6+1}{9} = \frac{16}{9}$



A határérték (bal és jobboldali is) megegyezik, tehát megszűntethető (elsőfajú) szakadása van a függvényeк.
A könnyebbség kedvéért a függvény így néz ki. Látható, hogy a -3 –ban a függvény nincs értelmezve, de balról és jobbról is ugyanoda tart. Míg a 0-ban balról és jobbról is végtelenhez tart.

b. $f(x) = \frac{x^4-3x^3}{|2x^2-6x|}$

Két folytonos függvény hányadosa mindenütt folytonos, kivéve a nevező gyökhelyein. $|2x^2-6x| = 2|x(x-3)| = 0$. Nyilván a gyökök a 0 és 3.

Tehát ezeken a helyeken kell vizsgálni a függvény (bal és jobboldali) határértékét.

Az egyértelműen látszik, hogy a 0 helyen 0/0 típusú határértéket kapunk, így először egyszerűsítenünk kell.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4-3x^3}{|2x^2-6x|} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3(x-3)}{2\cdot|x\cdot(x-3)|} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3(x-3)}{2\cdot|x|\cdot|x-3|}$$

Innentől vizsgáljuk a bal és jobb oldali határértéket:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^4-3x^3}{|2x^2-6x|} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^3(x-3)}{2\cdot x\cdot|x-3|} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{x}\cdot\frac{x-3}{|x-3|} = \frac{1}{2}\cdot 0\cdot(-1) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^4-3x^3}{|2x^2-6x|} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^3(x-3)}{2\cdot|x|\cdot|x-3|} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{-x}\cdot\frac{x-3}{|x-3|} = \frac{1}{2}\cdot 0\cdot(-1) = 0$$

Tehát $x = 0$-ban a bal és jobboldali határérték megegyezik, tehát megszüntethető (elsőfajú) szakadása van.

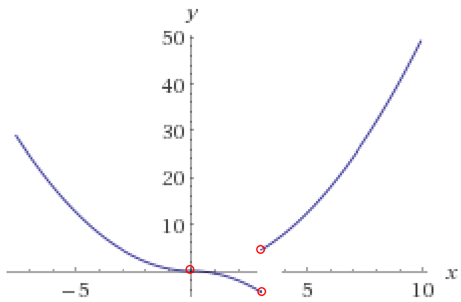
Vizsgáljuk az x=3-ban. Ha behelyettesítjük a 3-at, akkor szintén 0/0 típusú határértéket kapunk, ezért egyszerűsítenünk kell.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-3x^3}{|2x^2-6x|} = \lim_{x\to 3}\frac{x^3(x-3)}{2\cdot|x|\cdot|x-3|}$$

Innentől vizsgáljuk a baloldali és jobboldali határértéket:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^4-3x^3}{|2x^2-6x|} = \lim_{x\to 3^+}\frac{x^3(x-3)}{2\cdot x\cdot(x-3)} = \lim_{x\to 3^+}\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{27}{3} = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^4-3x^3}{|2x^2-6x|} = \lim_{x\to 3^+}\frac{x^3(x-3)}{2\cdot x\cdot[-(x-3)]} = \lim_{x\to 3^+}\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{27}{3}\cdot(-1) = -\frac{9}{2}$$



Tehát a függvénynek az $x = 3$ pontban véges ugrása (elsőfajú szakadása) van.

A könnyebbség kedvéért figyeljük meg, hogyan is néz ki a függvény. Láthatóan a 0-ban és 3-ban tényleg nincs értelmezve. A nullában jól látszik, hogy a szakadás megszüntethető, a 3-nál pedig véges ugrás van.

5. Számoljuk ki a határértéket! ($\frac{\sin x}{x}$ típusú határérték)

a. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 9x}$

A határérték 0/0 típusú, azonban az egyszerűsítés nem tűnik teljesen célravezetőnek. Ezért érdemes az ismert $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ határértéket.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 9x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\cos 7x}\cdot\frac{1}{\sin 9x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 7x}\cdot\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{7x}{9x}\cdot\frac{9x}{\sin 9x} = \frac{1}{\cos 0}\cdot 1\cdot\frac{7}{9}\cdot 1 = \frac{7}{9}$$

b. $\lim_{x\to 0}\frac{5x-\sin 8x}{7x+\sin 2x}$

$$\lim_{x\to0}\frac{5x-\sin 8x}{7x+\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{\sin 8x}{5x}}{1+\frac{\sin 2x}{7x}}\cdot\frac{5x}{7x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{\sin 8x}{8x}\cdot\frac{8}{5}}{1+\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{7}}\cdot\frac{5}{7}=\frac{1-1\cdot\frac{8}{5}}{1+1\cdot\frac{2}{7}}\cdot\frac{5}{7}=\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{9}{7}}\cdot\frac{5}{7}=-\frac{3}{9}=$$

$$=-\frac{1}{3}$$

c. $\lim_{x\to0}\frac{\cos x^3-1}{6x^6}$

Láthatóan a határérték $0/0$ típusú. A $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ azonosságot fogjuk használni.

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x^3-1}{6x^6}=\lim_{x\to0}-\frac{1-\cos x^3}{2\cdot3\cdot x^6}=\lim_{x\to0}-\frac{1-\cos x^3}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot x^6}$$

$$=\lim_{x\to0}-\sin^2\frac{x^3}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot x^6}=\lim_{x\to0}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin\frac{x^3}{2}\cdot\sin\frac{x^3}{2}}{\frac{x^3}{2}\cdot\frac{x^3}{2}\cdot4}=$$

$$=\lim_{x\to0}-\frac{1}{12}\cdot\frac{\sin\frac{x^3}{2}}{\frac{x^3}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x^3}{2}}{\frac{x^3}{2}}=-\frac{1}{12}\cdot1\cdot1=-\frac{1}{12}$$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$
$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$$
$$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$$
$$\to\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$
$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$$
$$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$$
$$\to\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

d. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos\sqrt[5]{x^2}}{\sin\sqrt[3]{x^2}}$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos\sqrt[5]{x^2}}{\sin\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^{\frac{2}{5}}}{\sin x^{\frac{2}{3}}}=\lim_{x\to0}2\cdot\frac{1-\cos x^{\frac{2}{5}}}{2}\cdot\frac{1}{\sin x^{\frac{2}{3}}}=\lim_{x\to0}2\cdot\sin^2\left(\frac{x^{\frac{2}{5}}}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sin x^{\frac{2}{3}}}=$$

$$=\lim_{x\to0}2\cdot\frac{\sin\left(\frac{x^{\frac{2}{5}}}{2}\right)}{\frac{x^{\frac{2}{5}}}{2}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{x^{\frac{2}{5}}}{2}\right)}{\frac{x^{\frac{2}{5}}}{2}}\cdot\frac{\frac{x^{\frac{4}{5}}}{4}}{x^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sin x^{\frac{2}{3}}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{x^{\frac{2}{5}}}{2}\right)}{\frac{x^{\frac{2}{5}}}{2}}\cdot\frac{x^{\frac{2}{15}}}{2}\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sin x^{\frac{2}{3}}}=1\cdot0\cdot1=0$$

6. Folytonosak-e az alábbi függvények?

a. $f(x)=\begin{cases}e^x-1 & ha\ x\geq0\\ \frac{x^2-3x}{x^3-2x^2+x} & ha\ x<0\end{cases}$

Az e^x-1 függvény minden pontjában folytonos, és az értéke a 0-ban 0. Tehát a függvény $x\geq0$ részen minden pontban folytonos.

Ahhoz, hogy a függvény folytonos legyen (vagyis minden pontjában folytonos), az kell, hogy a függvény többi részében is, (vagyis az $x<0$ részen is) folytonos legyen, illetve, hogy a két darab bal illetve jobb oldali határértéke megegyezzen.

Az $\frac{x^2-3x}{x^3-2x^2+x}$ függvény mindenhol folytonos, kivéve a tört nevezőjének gyökhelyein.

$$x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2$$

Tehát a gyökök, a 0, és az 1. Ezek közül egyik sem az $x<0$ részen van. Tehát a függvény minden pontját vizsgáltuk már, csak a 0 helyet nem.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}e^x-1=e^0-1=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-3x}{x^3-2x^2+x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x-3)}{x(x-1)(x-1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(x-3)}{(x-1)(x-1)} = \frac{-3}{(-1)\cdot(-1)} = 3$$

Tehát a függvény bal és jobb oldali határértéke nem egyezik meg. Így a függvény nem folytonos. (elsőfajú szakadása van, véges ugrás)

b. $f(x) = \begin{cases} |x^2-1|+1 & ha\ x \le 1 \\ 2x-1 & ha\ x > 1 \end{cases}$

A függvény mindkét külön darabja folytonos. Tehát csak azt kell vizsgálnunk, hogy az 1 pontban a bal és a jobboldali határérték egyenlő-e.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x-1 = 2\cdot 1 - 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} |x^2-1|+1 = |1^2-1|+1 = 1$$

Tehát a függvény kétoldali határértéke megegyezik, és ez megegyezik a függvényértékkel is. Tehát a függvény folytonos mindenhol.

c. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^3-2x^2+x} & ha\ x < 0 \\ 3 & ha\ x = 0 \\ \sin x & ha\ x > 0 \end{cases}$

A $\sin x$ függvény mindenütt folytonos, így a függvényünk mindenütt folytonos, ha $x > 0$.
A racionális törtfüggvények mindenütt folytonos, kivéve a nevező gyökhelyein. A nevező $x^3-2x^2+x = x(x-1)^2$. Tehát a gyökhelyek a 0 és 1. Ezek nincsenek az $x < 0$ részen. Tehát az összes $x < 0$ helyen folytonos. Azt kell még vizsgálnunk, hogy mi a helyzet a 0 helyen.

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x = \sin 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x^3-2x^2+x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x\cdot(x-1)^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{0}{(0-1)^2} = 0$$

A függvény jobb és baloldali határértéke megegyezik azonban ez nem egyezik meg a függvényértékkel. (Tehát a függvénynek megszűntethető szakadása van az $x = 0$ pontban.)

7. Milyen a és b esetén folytonosak az alábbi függvények?

a. $f(x) = \begin{cases} (x-3)^2 & ha\ x \le 0 \\ ax+b & ha\ 0 < x < 4 \\ 2\cdot\sqrt{x} & ha\ 4 \le x \end{cases}$

Mivel a polinom függvények mindenütt folytonos, így a három külön darab az intervallumok belsejében folytonosak. Így tehát a továbbiakban csak az intervallumok határán ($x = 0$, és $x = 4$) kell vizsgálnunk a folytonosságot.

Folytonosság az $x = 0$-ban:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x-3)^2 = (0-3)^2 = 9$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} ax+b = a\cdot 0 + b = b$$

$$f(0) = (0-3)^2 = 9$$

Ahhoz, hogy a függvény folytonos legyen a fenti három értéknek meg kell egyeznie. Eszerint $9 = b$.

Folytonosság az $x = 4$ pontban:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} ax+b = 4\cdot a + b = 4a+b$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} 2\cdot\sqrt{x} = 2\cdot\sqrt{4} = 2\cdot 2 = 4$$

$$f(4) = 2\cdot\sqrt{4} = 2\cdot 2 = 4$$

Ahhoz, hogy a függvény folytonos legyen a fenti három értéknek meg kell egyeznie. Eszerint $4 = 4a + b$. Felhasználva, hogy az előző feltétel szerint $b = 9$ kapjuk, hogy $4 = 4a + 9$. Vagyis $-\frac{5}{4} = a$.

Ezek szerint a függvényünk minden pontban folytonos (tehát maga a függvény folytonos), ha $-\frac{5}{4} = a$ és $9 = b$.

b. $f(x) = \begin{cases} x & ha\ |x| \leq 1 \\ x^2 + ax + b & ha\ 1 < |x| \end{cases}$

Első körben írjuk át a függvényt kicsit, hogy jobban látszódjanak a határpontok.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & ha\ \ x < -1 \\ x & ha\ \ -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 + ax + b & ha\ 1 < x \end{cases}$$

Mivel a polinom függvények mindenütt folytonosak, így a három külön darab az intervallumok belsejében folytonos. Így tehát a továbbiakban csak az intervallumok határán ($x = -1$, és $x = 1$) kell vizsgálnunk a folytonosságot.

Folytonosság az $x = -1$ pontban:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} x^2 + ax + b = (-1)^2 + a \cdot (-1) + b = 1 - a + b$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x = -1$$

$$f(-1) = -1$$

Ahhoz, hogy a függvény folytonos legyen a fenti három értéknek meg kell egyeznie. Eszerint $1 - a + b = -1$. Tehát $a - b = 2$

Folytonosság az $x = 1$ pontban:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 + ax + b = 1^2 + a \cdot 1 + b = 1 + a + b$$

$$f(1) = 1$$

Ahhoz, hogy a függvény folytonos legyen a fenti három értéknek meg kell egyeznie. Eszerint $1 = 1 + a + b$. Tehát $0 = a + b$.

Ezek szerint a függvényünk minden pontban folytonos, ha a két feltétel (egyszerre) teljesül. Vagyis $\begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 0 \end{cases}$ egyenletrendszert kell megoldanunk. Vagyis $a = 2, b = -2$ esetben lesz a függvény folytonos.