BME Bevezető Matematika
BMETE90AX40

Czirók Emese

Komplex számok összefoglaló

Definíció:

Algebrai alak

Bármely komplex szám egyértelműen felírható

$$z = a + bi$$

alakban, ahol $a, b \in \mathbf{R}$, és $i = \sqrt{-1}$.

$a = \mathrm{Re}(z)$ valós rész

$b = \mathrm{Im}(z)$ képzetes/imaginárius rész

Trigonometrikus alak:

Bármely nullától különböző komplex szám egyértelműen felírható

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

alakban, ahol $r \geq 0, -\pi \leq \varphi < \pi$.

$r = |z|$ a komplex szám hossza

$\varphi = \arg(z)$ a komplex szám argumentuma.

A két alak közti átírás:

Algebrai--> Trigonometrikus

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \text{ ha } a > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \text{ ha } a < 0 \end{cases}$$

Megj: $arctg(\varphi) = tan^{-1}\,\varphi$. Számológépen ez van!

Algebrai--> Trigonometrikus

$$a = r \cdot \cos\varphi$$
$$b = r \cdot \sin\varphi$$

Def: $\bar{z}$ (a z komplex szám **konjugáltja**) az a komplex szám, melyre: $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\bar{z})$ és $\mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(\bar{z})$. Vagyis $a + bi$ konjugáltja $a - bi$.

Hasznos tudni: $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$

Műveletek komplex számokkal:

i hatványok $\quad i^0 = 1\; i^1 = i,\, i^2 = -1,\, i^3 = -i,\, i^4 = 1,\, i^5 = i\; \ldots.$

általánosan: $\quad i^{4k} = 1\; i^{4k+1} = i,\, i^{4k+2} = -1,\, i^{4k+3} = -i$ (negatív kitevőre is!)

Algebrai alak:

$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$ „Valós rész a valóssal, képzetes a képzetes résszel adódik össze/vonódik ki."

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$ „Mindent mindennel össze kell szorozni, és figyelembe venni, hogy $i^2 = -1$."

Lehetőleg ne hatványozzunk algebrai alakban. Főleg ne sokadik hatványt. (lehet, működik, de sokkal egyszerűbb, trigonometrikusan) Persze néha elkerülhetetlen (később példát is mutatunk rá):

$$(a \pm bi)^2 = a^2 - b^2 \pm 2abi$$

$$(a + bi)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot (bi)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} \binom{n}{4k} a^{4k} \cdot (b)^{n-4k} - \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor} \binom{n}{4k+2} a^{4k+2} \cdot (b)^{n-(4k+2)}$$

$$+ i \left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} \binom{n}{4k+1} a^{4k+1} \cdot (b)^{n-(4k+1)} - \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor} \binom{n}{4k+3} a^{4k+3} \cdot (b)^{n-(4k+3)} \right)$$

Igen, ez ilyen undorító… ezért nem javasolt

Gyökvonás szintén kevésbé ajánlott algebrai alakban. Működik, de legtöbbször csúnya. (később azért lesz példa rá.)

Trigonometrikus alakban:

$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot s(\cos\omega + i\sin\omega) = rs(\cos(\varphi+\omega) + i\sin(\varphi+\omega))$ „A hosszok összeszorzódnak, a szögek összeadódnak”

Lehetőleg ne adjunk össze/vonjunk ki trigonometrikus alakban… menne, de az ehhez szükséges trigonometrikus azonosságokat ritkán használjuk, kevésbé közismertek…

Hatványozás/gyökvonás:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \quad k = 0,1,2,\dots,n-1$$

A gyökvonásnak tehát n megoldása van a komplex számok körében!!!

Mintapéldák:

1) Adjuk meg a z komplex számot!

a) $z + \bar{z} = 8; \quad 2\mathrm{Im}(z) + 3\mathrm{Re}(z) = 16$

Megoldás:

$z = a + bi; \quad \bar{z} = a - bi; \quad \mathrm{Re}(z) = a; \mathrm{Im}(z) = b$

Tehát a két egyenlet: $\begin{cases}(a+bi) + (a-bi) = 8\\ 2b + 3a = 16\end{cases}$

Az elsőt átrendezve: $a + bi + a - bi = 2a = 8$ Vagyis $a = 4$.

Ezt beírva a másodikba: $2b + 3\cdot 4 = 16$. Vagyis $2b = 4$, tehát $b = 2$.

Tehát $z = 4 + 2i$

b) $\arg(z) = \frac{5\pi}{4}$, $\mathrm{Re}(z) = -2$

Megoldás:

Algebrai alakban:

Legyen $z = abi$. A második alapján: $a = -2$. A valós rész negatív, tehát a $\varphi = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$.

Vagyis: $\frac{5\pi}{4} = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{b}{-2}\right)$. Tehát $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\left(\frac{b}{-2}\right)$. Mindkét oldal tangensét véve: $\tan\frac{\pi}{4} = 1 = \frac{b}{-2}$. Tehát $b = -2$ szintén.

Vagyis $z = -2 - 2i$

Alkalmazzuk, hogy

$$a = \mathrm{Re}(z) = r\cos(\varphi).$$

Eszerint $-2 = r\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = r\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Tehát $2\sqrt{2} = r$.

Vagyis $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

Gyors számolás után látszik, hogy a két megoldás ugyanaz.

Trigonometrikus alakban:

2) $(3+8i)(2-4i) =$

$$3\cdot 2 + 3\cdot(-4i) + 8i\cdot 2 + (8i)\cdot(-4i) = 6 - 12i + 16i - 32i^2 = 6 + 32 - 12i + 16i = 38 + 4i$$

3)

$\frac{5-2i}{2i-3} =$

$$\frac{5-2i}{-3+2i}\cdot\frac{-3-2i}{-3-2i} = \frac{(5-2i)(-3-2i)}{(-3)^2 + 2^2} = \frac{-15 - 10i + 6i - 4}{13} = \frac{-19}{13} - \frac{4}{13}i$$

4) $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$

$8\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

5) $i^{-3} =$

$i^{-1\cdot 4+1} = i^1 = i$

6) $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{25} =$

Átírjuk az $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ komplex számot trigonometrikus alakra.

$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

$a > 0 \ \rightarrow \ \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$

Tehát $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = 1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

A feladat tehát: $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{25}$

$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{25} = \cos\frac{25\pi}{3}+i\sin\frac{25\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

7) Oldjuk meg a komplex számok körében! $\sqrt{25}$

Megoldás:

Ne felejtsük el, hogy a komplex számok körében vagyunk, tehát kettő megoldást kell kapnunk.

Meg lehet csinálni trigonometrikus alakban (képlet szerint) vagy algebrai alakban is.

<u>Trigonometrikus alakban:</u>

Írjuk át a 25-t trigonometrikus alakra:

$25 = 25 + 0i$

$r = \sqrt{25^2} = 25$

$a > 0 \ \rightarrow \ \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{25}\right) =$

$\tan^{-1} 0 = 0$.

Tehát $\sqrt{25} = \sqrt[2]{25(\cos 0 + i\sin 0)}$

Az ismert tétel alapján:

$\sqrt[2]{25(\cos 0 + i\sin 0)} =$

$\sqrt[2]{25}\left(\cos\left(\frac{0}{2}+\frac{2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{0}{2}+\frac{2k\pi}{2}\right)\right)$, $k = 0, 1$

Vagyis a két megoldás

$5(\cos 0 + i\sin 0) = 5$ illetve

$5(\cos(0+\pi) + i\sin(0+\pi))$=-5

<u>Algebrai alakban:</u>

$25 = 25 + 0i$

Legyen $\sqrt{25} = z = a + bi$

Tehát a z olyan, hogy $z^2 = (a+bi)^2 = 25$

Eszerint $25 = a^2 + 2abi + (bi)^2$

$25 = a^2 + 2abi + b^2i^2$

$25 = a^2 + 2abi - b^2$

$25 = a^2 - b^2 + 2abi$

$25 + 0i = a^2 - b^2 + 2abi$

Mivel a valós részek és a képzetes részek is egyenlők kell legyenek:

$\begin{cases} 25 = a^2 - b^2 \\ \ \ 0 = 2ab \end{cases} \quad a, b \in \mathbf{R}$

Két (valós) szám szorzata csak akkor lesz 0, ha az egyik maga is 0.

Tehát vizsgáljuk a két esetet:

1. ha $a = 0$, akkor az első egyenlet szerint: $25 = -b^2$, ami VALÓS számok körében nem lehetséges.
2. ha $b = 0$, ekkor az első egyenlet szerint: $25 = a^2$, tehát $a = \pm 5$.

Eszerint a két megoldás:

$z = 5 + 0i$ és $z = -5 + 0i$.

Szerencsére ez a két megoldás jött ki a trigonometrikus alakban is. ☺

8) Ábrázoljuk a komplex számsíkon!

a) $\{z \in \mathbf{C} |\ |z + 5i| \geq |z|\}$

Megoldás:

Legyen $z = a + bi,\ z + 5i = a + (b + 5)i$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|z + 5i| = \sqrt{a^2 + (b + 5)^2}$

A feltétel szerint: $|z| \leq |z + 5i|$.

Tehát: $\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{a^2 + (b + 5)^2}$ Mivel mindkét oldal pozitív, a négyzetre emelés nem okoz problémát!

$a^2 + b^2 \leq a^2 + (b + 5)^2$

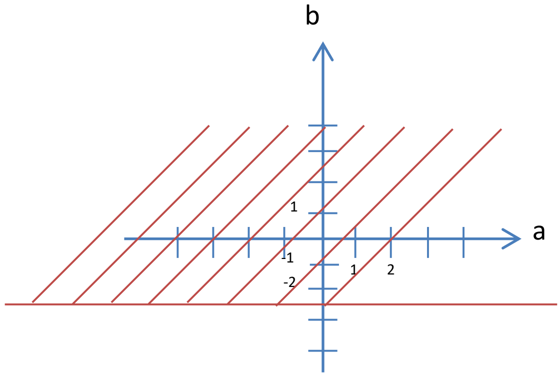
$a^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 + 10b + 25$

$0 \leq 10b + 25$

$-25 \leq 10b$

$-\frac{5}{2} \leq b$

Keressük meg az (a,b) koordinátarendszerben azokat a pontokat melyre ez teljesül!



b) $\{z \in \mathbf{C} |\ \ |z| \leq |z - 2i|\ ;\ \ |z - i| \leq 1\}$

Megoldás:

Legyen szokás szerint

$z = a + bi \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

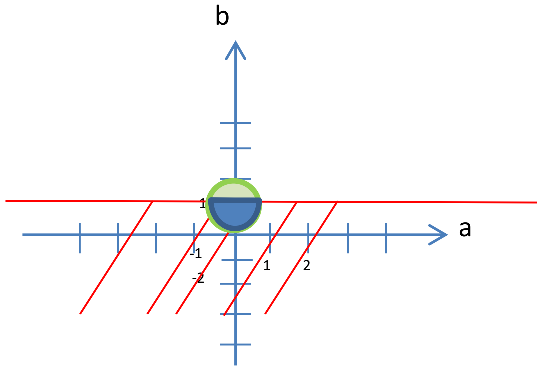
$z - 2i = a + (b - 2)i \quad |z - 2i| = \sqrt{a^2 + (b - 2)^2}$

$z - i = a + (b - 1)i \quad |z - i| = \sqrt{a^2 + (b - 1)^2}$

A feltételek szerint:

$|z| \leq |z - 2i|$

$\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2 - 4b + 4}$ Mivel mindkét oldal pozitív négyzetre emelhetünk.



$a^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 - 4b + 4$

$0 \leq -4b + 4$

$4b \leq 4$

$b \leq 1$ Ez ugye egy egyenes és az általa határolt egyik félsík. (Ábrán pirossal)

A másik feltétel pedig:

$|z - i| < 1$

$\sqrt{a^2 + (b - 1)^2} \leq 1$ Mivel mindkét oldal pozitív gond négyzetre emelhetünk

$a^2 + (b - 1)^2 \leq 1$ Ez ugye egy $(0, 1)$ középpontú, 1 sugarú kör, és az azon belüli pontok. (Ábrán zölddel)

A két feltételnek egyszerre kell teljesülnie:

Ezek tehát a kör alsó fele. **Az ábrán kékkel jelölve.**

c) $\{z \in \mathbf{C} |\ \ |z| \geq 9,\ \ \mathrm{Im}(z) > \mathrm{Re}(z)\}$

Megoldás:

Legyen $z = a + bi,\quad \mathrm{Re}(z) = a, \mathrm{Im}(z) = b,\ \ |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Az első feltétel szerint

$|z| \geq 9$

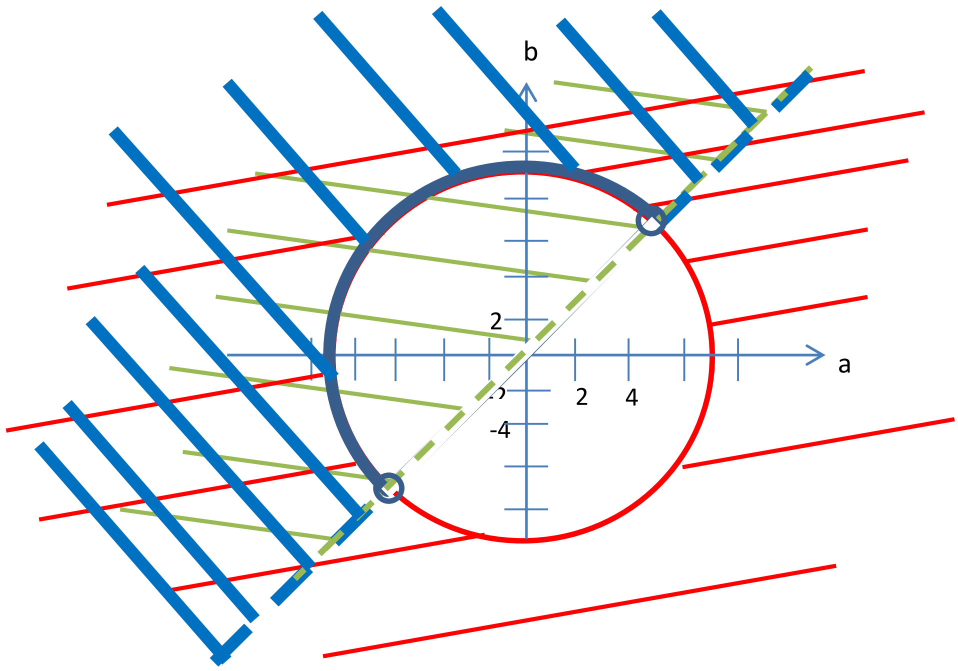
$\sqrt{a^2 + b^2} \geq 9$ Mivel mindkét oldal pozitív egyszerűen négyzetre emelhetünk.

$a^2+b^2 \geq 81$ Ez egy $(0,0)$ középpontú, 9 sugarú kör, és az azon kívül eső pontok. (Ábrán pirossal.) Figyeljünk, hogy a körvonal is megfelelő!

A másik feltétel szerint:

$\mathrm{Im}(z) > \mathrm{Re}(z)$ Vagyis **$b > a$. Ez a 45 fokos egyenes által határolt félsík. (Ábrán zölddel)** Figyeljünk, hogy maga az egyenes nem felel meg, azt szaggatott vonallal jelezzük!

A megoldás a két halmaz metszete, vagyis az melyek mind zöld, mind pirossal jelöltek. Szenteljünk különös figyelmet a kör és az egyenes metszéspontjainak. Mivel ez a két pont olyan, hogy az első feltéelnek nem felelnek meg, míg a másodiknak igen, ez a két pont nincs benne a végső halmazban. Ezt üres karikával szoktuk jelölni. (a végső megoldást érdemes egy elütő színnel megjelölni, ábrán kékkel)



9) Oldjuk meg a komplex számok körében!

a) $(3+i)z^2 - 2z + 4 - 4i = 0$

Megoldás:

Ez egy másodfokú egyenlet, használjuk a megoldó képletet, mely a komplex számok körében is működik.

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3+i)(4-4i)}}{2(3+i)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(12+4+4i-12i)}}{6+2i} = \frac{2 \pm \sqrt{4-(64-8i)}}{6+2i}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-60+32i}}{6+2i} = \frac{2 \pm \sqrt{4(-15+8)i}}{6+2i} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-15+8i}}{6+2i}$$

Az egyszerűség kedvéért külön számoljuk ki a gyökvonást:

A gyökvonást lehet trigonometrikus alakban vagy algebrai alakban elvégezni:

Trigonometrikus alakban:

Írjuk át a $-15+8i$ számot trigonometrikus alakba!

$r=\sqrt{(-15)^2+8^2}=\sqrt{289}=17$

Mivel $a<0 \to \varphi=\pi+\tan^{-1}\left(\frac{8}{-15}\right)$

Tehát $\varphi=180°-28{,}07°=151{,}93°$

Tehát a

$$-15+8i=17(\cos 151{,}93° + i\sin 151{,}93°)$$

Vagyis a gyökvonás két lehetséges eredménye:

$\sqrt{17}\left(\cos\frac{151{,}93°}{2}+i\sin\frac{151{,}93°}{2}\right)=$

$\sqrt{17}(\cos 75{,}97°+i\sin 75{,}97°)=1+4i$

Illetve:

$$\sqrt{17}\left(\cos\left(\frac{151{,}93°}{2}+180°\right)+i\sin\left(\frac{151{,}93°}{2}+180°\right)\right)=\sqrt{17}(\cos 255{,}97°+i\sin 255{,}97°)=-1-4i$$

Pontos értéket csak akkor kapunk, ha menet közben sehol nem kerekítünk!

Algebrai alakban:

Legyen $\sqrt{-15+8i}=z=a+bi$

Tehát

$$\begin{aligned}-15+8i=(a+bi)^2&=a^2+2abi+(bi)^2\\&=a^2+b^2i^2+2abi\\&=a^2-b^2+2abi\end{aligned}$$

Mivel a valós és képzetes részeknek meg kell egyeznie a következőt kapjuk:

$$\begin{cases}-15=a^2-b^2\\ \quad 8=2ab\end{cases} \qquad a,b\in\mathbf{R}$$

A második egyenletből fejezzük ki a-t!

$a=\frac{8}{2b}=\frac{4}{b}$. Ezt beírva az első egyenletbe:

$-15=\left(\frac{4}{b}\right)^2-b^2=\frac{16}{b^2}-b^2$

A b^2 nem lehet 0, hiszen akkor a második egyenlet nem lenne igaz. Tehát beszorozhatunk vele.

$-15b^2=16-b^4$

$b^4-15b^2-16=0$

Legyen $b^2=y^2$, ekkor

$y^2-15y-16=0$ egyenletet kell megoldani.

$$y_{1,2}=\frac{15\pm\sqrt{(-15)^2-4\cdot(-16)}}{2}=\frac{15\pm\sqrt{289}}{2}=\frac{15\pm 17}{2}$$

Tehát a két megoldás $y=b^2=-1$, mely a VALÓS számok körében nem megoldható, illetve $y=b^2=16$.

Eszerint $b=\pm 4$. Ebből pedig $a=\frac{4}{b}=\pm 1$

Tehát a két megoldás:

$z=1+4i$ illetve $z=-1-4i$.

Ez után térjünk vissza az eredeti egyenletünk megoldó képletéhez:

$$\frac{2\pm 2\sqrt{-15+8i}}{6+2i}=\frac{2\pm 2(1+4i)}{6+2i} \quad \text{vagy} \quad \frac{2\pm 2\sqrt{-15+8i}}{6+2i}=\frac{2\pm 2(-1-4i)}{6+2i}$$

Mivel $-1-4i=-(1+4i)$ elég az egyiket vizsgálni, hiszen valójában ugyanazok.

$$\frac{2\pm 2(1+4i)}{6+2i}=\frac{2+2(1+4i)}{6+2i} \quad \text{vagy} \quad \frac{2-2(1+4i)}{6+2i}$$

$$\frac{2+2(1+4i)}{6+2i}=\frac{2+2+8i}{6+2i}=\frac{4+8i}{6+2i}=\frac{2+4i}{3+1i}=\frac{2+4i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}=\frac{(2+4i)(3-i)}{9+1}=\frac{6+4+12i-2i}{10}$$

$$=\frac{10+10i}{10}=\mathbf{1}+\boldsymbol{i}$$

$$\frac{2-2(1+4i)}{6+2i}=\frac{2-2-8i}{6+2i}=\frac{-8i}{6+2i}=\frac{-4i}{3+1i}=\frac{-4i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}=\frac{(-4i)(3-i)}{9+1}=\frac{-12i-4}{10}=\frac{-4-12i}{10}$$
$$=-\mathbf{\frac{2}{5}}-\mathbf{\frac{6}{5}}\boldsymbol{i}$$

Tehát a komplex együtthatós egyenlet két megoldása: $(1+i)$ és $-\frac{2}{5}-\frac{6}{5}i$.