Teljes függvényvizsgálat

Függvényvizsgálat lépései:

1. Értelmezési tartomány:
   a. értelmezési tartomány megadása
   b. szakadási helyek meghatározása
2. Páros/páratlanság illetve periodicitás vizsgálata
3. Függvény határértékének vizsgálata:
   a. az értelmezési tartomány szélén (vagy $\pm\infty$-ben)
   b. a szakadási helyeken (-> szakadási helyek osztályozása)
   c. nem egyértelműen folytonos függvény esetén a lehetséges szakadási helyeknél (intervallumokon összeillesztett függvény esetében az illesztési ponton)
4. Első derivált alapján: (valójában az első a pontban nem nulla páratlanodik derivált alapján)
   a. monotonitás (nő, csökken) vizsgálata az első derivált előjele alapján
   b. lehetséges szélsőérték helyek keresése és vizsgálata az első derivált alapján
5. Második derivált alapján: (valójában az első a pontban nem nulla párosadik derivált alapján)
   a. konvexitás (konvex/konkáv) vizsgálata a második derivált előjele alapján
   b. lehetséges inflexiós pontok keresése és vizsgálata az első derivált alapján
6. Függvényérték kiszámolása a „nevezetes pontokban”:
   a. tengelymetszetek kiszámolása (zérushelyek, y tengely metszet)
   b. szélsőértékek (minimum/maximum kiszámolása)
   c. inflexiós pont koordinátáinak kiszámítása
7. Függvény grafikonjának vázolása
8. Értékkészlet tartomány megadása

Egy teljes függvényvizsgálat:

Végezzük el a következő függvény teljes függvényvizsgálatát!

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-4x^3+4x^2}{x^3-5x^2+6x} & ha\ x\neq 0, x\neq 2\ és\ x\neq 3\\ 5 & ha\ x=2\end{cases}$$

Később, mind az értelmezési tartomány, mind a szakadási helyek, mind pedig a határérték meghatározásához hasznos lenne szorzattá alakítani a nevezőt és a számlálót.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2\cdot(x-2)^2}{x\cdot(x-2)\cdot(x-3)} & ha\ x\neq 0, x\neq 2\ és\ x\neq 3\\ 5 & ha\ x=2\end{cases}$$

1. Értelmezési tartomány:
   a. A függvény minden valós számra értelmezve van, kivéve $x=0$ és $x=3$ eseteket. Tehát $D_f=\mathbf{R}\backslash\{0{,}3\}$, máshogy: $ÉT=\,]-\infty;0[\,\cup\,]0\,,3[\,\cup\,]3,\infty[$
   b. A függvény alapvetően egy racionális törtfüggvény, mely mindenhol folytonos, kivéve a nevező nullhelyein, vagyis 0, 2, 3 pontokban lehet szakadás. (Mivel a 2 helyen a függvény értelmezve van, itt még lehet folytonos.)

2. A függvény látatóan nem periodikus (egyik tagja sem az).
A paritás vizsgálathoz kell:

Függvény páros:
Ha minden x esetén: $f(-x) = f(x)$
Függvény páratlan:
Ha minden x esetén: $f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = \begin{cases} \dfrac{(-x)^4 - 4\cdot(-x)^3 + 4\cdot(-x)^2}{(-x)^3 - 5(-x)^2 + 6(-x)} = \dfrac{x^4 + 4x^3 + 4x^2}{-x^3 - 5x^2 - 6x} & ha\ x \neq 0, x \neq 2\ és\ x \neq 3 \\ 5 & ha\ x = 2 \end{cases}$$

Ez sem $f(x)$-el, sem $-f(x)$ –el nem egyezik meg. Tehát a függvény se nem páros, se nem páratlan.

3. Függvény határértéke:
   a. végtelenben:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^4}{x^4} - \frac{4x^3}{x^4} + \frac{4x^2}{x^4}}{\frac{x^3}{x^4} - \frac{5x^2}{x^4} + \frac{6x}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^3}} = \frac{1 - 0 + 0}{0 - 0 + 0} = \infty$$

Megj: onnan tudjuk, hogy plusz végtelenhez tart, hogy az eredeti függvény nevezője és számlálója is pozitív, ha $x > 3$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(-x)^4 - 4(-x)^3 + 4(-x)^2}{(-x)^3 - 5(-x)^2 + 6(-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + 4x^3 + 4x^2}{-x^3 - 5x^2 - 6x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^4}{x^4} + \frac{4x^3}{x^4} + \frac{4x^2}{x^4}}{\frac{-x^3}{x^4} - \frac{5x^2}{x^4} - \frac{6x}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{-\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3}} = \frac{1 + 0 + 0}{-0 - 0 - 0} = -\infty$$

Megj: onnan tudjuk, hogy mínusz végtelenhez tart, hogy az eredeti függvény negatív, ha $x < 0$.

   b. szakadási helyeken:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot(x-2)^2}{x\cdot(x-2)\cdot(x-3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot(x-2)}{(x-3)} = \frac{0\cdot(0-2)}{(0-3)} = 0$$

Tehát nullában nincs értelmezve, viszont a határérték balról és jobbról megegyezik, tehát elsőfajú, megszűntethető szakadása van.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2\cdot(x-2)^2}{x\cdot(x-2)\cdot(x-3)} = \frac{3^2\cdot(3-2)^2}{3\cdot(3-2)\cdot(3-3)} = \frac{9}{3\cdot 1\cdot 0}$$

Mivel a „szám/0" típusú határérték végtelenhez, illetve mínusz végtelenhez tart. Vizsgáljuk a bal és jobb oldali határértéket.

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2\cdot(x-2)^2}{x\cdot(x-2)\cdot(x-3)} = \infty, \qquad \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2\cdot(x-2)^2}{x\cdot(x-2)\cdot(x-3)} = -\infty,$$

hiszen a számláló és a nevező is pozitív, ha $x > 3$, míg a számláló a 3^- esetben pozitív, azonban a nevező negatív.
Tehát az $x = 3$ pontban másodfajú (lényeges) szakadása van a függvénynek.

   c. illesztési pontokon:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2\cdot(x-2)^2}{x\cdot(x-2)\cdot(x-3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(x-2)}{(x-3)} = \frac{2\cdot(2-2)}{(2-3)} = 0$$

Tehát $x = 2$ pontban a függvény bal és jobb oldali határértéke megegyezik, azonban a függvényértékkel ez nem egyezik meg, hiszen $f(2) = 5$. Tehát elsőfajú, megszűntethető szakadása van a függvénynek az $x = 2$ pontban.

4. Az első derivált:
A deriválhatósághoz kell, hogy a függvény folytonos legyen, így a derivált függvény az $x = 0{,}2{,}3$ pontokban nincs értelmezve.

$$f'(x) = \left(\frac{x\cdot(x-2)}{(x-3)}\right)' = \left(\frac{x^2-2x}{x-3}\right)' = \frac{(2x-2)\cdot(x-3)-(x^2-2x)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+6}{(x-3)^2}$$
$$= \frac{\left(x-\left(3+\sqrt{3}\right)\right)\cdot\left(x-\left(3-\sqrt{3}\right)\right)}{(x-3)^2}$$

A szélsőérték helyek és a monotonitás vizsgálatához szükségünk van a derivált zérushelyeire, illetve a függvény előjelére. Egy tört értéke akkor nulla, ha a számlálója nulla. A szorzat alakból látszik, hogy a derivált értéke tehát nulla, ha $x = 3+\sqrt{3}$ illetve $x = 3-\sqrt{3}$. Tehát itt LEHET szélsőértéke a függvénynek. Vizsgáljuk a függvény előjelét is. A nevező mindenképp pozitív, így a tört előjele csak a számlálótól függ. A számláló pedig a két gyök között negatív, az egyéb helyeken pedig pozitív. Egy táblázatban foglaljuk össze az előjelekkel kapcsolatos információt.

	$]-\infty;0[$	0	$]0;3-\sqrt{3}[$	$3-\sqrt{3}$	$]3-\sqrt{3};2[$	2	$]2;3[$	3	$]3;3+\sqrt{3}[$	$3+\sqrt{3}$	$]3+\sqrt{3};\infty[$
$f'(x)$	+	*n.é.*	+	*max*	-	*n.é.*	-	*n.é.*	-	*min*	+
$f(x)$	*nő*	*n.é.*	*nő*		*csökken*		*csöken*	*n.é*	*csökken*		*nő*

A táblázat első sorának kitöltése után gyorsan látszik, hogy a függvény monoton nő:
$]-\infty;0[$, $]0;3-\sqrt{3}[$, $]3+\sqrt{3};\infty[$ intervallumokon. Továbbá a függvény monoton csökken a $]3-\sqrt{3};2[$, $]2;3[,$ $]3;3+\sqrt{3}[$ intervallumokon.
A táblázat első sorából könnyen leolvashatjuk, hogy mindkét helyen, ahol a derivált függvény értéke 0, ott valóban szélsőértékhely van, hiszen a $3-\sqrt{3}$ előtt a derivált pozitív, utána negatív vagyis a függvénynek lokális maximuma van ezen a helyen. Ugyanígy a $3+\sqrt{3}$ helyen a függvénynek lokális minimuma van, hiszen előtte csökken a függvény, utána pedig növekszik.

5. A második derivált ott létezik, ahol az első derivált is, illetve az folytonos. Vagyis a második derivált ott létezik, ahol $x \neq 0{,}2{,}3$.

$$f''(x) = \left(\frac{x^2-6x+6}{(x-3)^2}\right)' = \frac{(2x-6)\cdot(x-3)^2-(x^2-6x+6)\cdot 2\cdot(x-3)}{(x-3)^4}$$
$$= \frac{(2x-6)\cdot(x^2-6x+9)-(x^2-6x+6)\cdot(2x-6)}{(x-3)^4}$$
$$= \frac{2x^3-12x^2+18x-6x^2+36x-54-2x^3+12x^2-12x+6x^2-36x+36}{(x-3)^4}$$
$$= \frac{6x-18}{(x-3)^4} = \frac{6(x-3)}{(x-3)^4}$$

Inflexiós pont ott lehet, ahol a tört értéke nulla, vagyis x=3-nál, Itt azonban a függvény nincs értelmezve. Tehát nincs inflexiós pontja a függvénynek. A konvex/konkávitáshoz pedig a második derivált előjelét kell vizsgálnunk. A függvény $x < 3$ esetben konkáv, hiszen a tört értéke ott negatív, míg $x > 3$ esetben konvex, hiszen ott a második derivált negatív. Az előző táblázat kiegészítése:

	$]-\infty;0[$	0	$]0;3-\sqrt{3}[$	$3-\sqrt{3}$	$]3-\sqrt{3};2[$	2	$]2;3[$	3	$]3;3+\sqrt{3}[$	$3+\sqrt{3}$	$]3+\sqrt{3};\infty[$
$f'(x)$	+	*n.é.*	+	*max*	-	*n.é.*	-	*n.é.*	-	*min*	+
$f''(x)$	-	*n.é.*	-		-	*n.é.*	-	*n.é*	+	+	+
$f(x)$	*nő, konkáv*	*n.é.*	*nő, konkáv*		*csökken, konkáv*		*csökken, konkáv*	*n.é*	*csökken, konvex*		*nő, konvex*

6. Függvényérték kiszámítása a nevezetes pontokban:
   a. Tengelymetszetek: <u>x tengely metszet (zérushely)</u>

$$\frac{x^2 \cdot (x-2)^2}{x \cdot (x-2) \cdot (x-3)} = 0$$

   Az eredeti függvény 0, ha a nevező nulla. Vagyis $x = 2$ vagy 0. Ezek a helyek azonban azok a helyek, ahol a függvény nincs értelmezve, (illetve nem ezt az ágát használjuk).
   y tengelymetszet:
   Az y tengelymetszet az, ahol az $x = 0$. Itt azonban a függvény nincs értelmezve, tehát nincs tengelymetszet.
   b.
      i. $f\left(3-\sqrt{3}\right)$

$$\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2 \cdot \left(\left(3-\sqrt{3}\right)-2\right)^2}{\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\left(3-\sqrt{3}\right)-2\right)\cdot\left(\left(3-\sqrt{3}\right)-3\right)} = \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\left(3-\sqrt{3}\right)-2\right)}{\left(\left(3-\sqrt{3}\right)-3\right)} = \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)}{-\sqrt{3}}$$

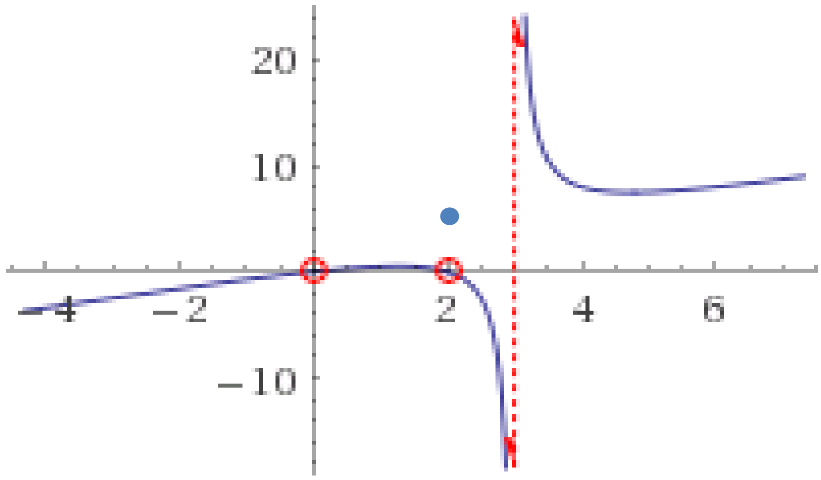
$$= \frac{6-4\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}-12}{-3} = -2\sqrt{3}+4$$

      ii. $f\left(3+\sqrt{3}\right)$

$$\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2 \cdot \left(\left(3+\sqrt{3}\right)-2\right)^2}{\left(3+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\left(3+\sqrt{3}\right)-2\right)\cdot\left(\left(3+\sqrt{3}\right)-3\right)} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\left(3+\sqrt{3}\right)-2\right)}{\left(\left(3+\sqrt{3}\right)-3\right)} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{6+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}+12}{3} = 2\sqrt{3}+4$$

   c. inflexiós pont nincs
7.



8. Látszik, hogy a függvény a lokális minimuma és lokális maximuma között csak az 5-öt veszi fel. Szintén leolvasható a függvény grafikonjáról, hogy az összes $2\sqrt{3}+4$ számot, és $-2\sqrt{3}+4$ –nél kisebb számot felvesz. Tehát

$$ÉK =]-\infty; -2\sqrt{3}+4] \cup]2\sqrt{3}+4; \infty]$$