Algebra 1. 2004/2005 tavasz
1. gyakorlat: Halmazok, relációk, leképezések

1. Igazoljuk a következő, halmazokra vonatkozó állításokat!

   (a) $A = A \setminus (B \setminus A)$

   (b) $(A \cup B) \setminus (B \setminus A) = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$

   (c) $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = B \iff A = \emptyset$, ahol X^c az X komplementere

• (d) $(\exists X:\ X \cup A = B) \iff (A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq B$

2. Mutassuk meg, hogy a relációkon értelmezett $\circ$ művelet asszociatív.

3. Legyenek ρ és η a valós számok következő binér relációi:

$$\rho = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ \mid\ a = b^2\right\}, \quad \eta = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ \mid\ b = 2a\right\}.$$

   Adjuk meg a $\rho \circ \eta$ és az $\eta \circ \rho$ relációkat! Igaz-e $\rho^{-1} \circ \eta^{-1} = (\eta \circ \rho)^{-1}$?

4. Jelölje ρ_m az egész számokon értelmezett modulo m kongruenciát, azaz $(a,b) \in \rho_m \iff a \equiv b\ (m)$. Határozzuk meg, hogy mikor áll fenn két egész között a $\rho_{m_1} \circ \rho_{m_2}$ reláció.

$\omega = \{(a,a) \mid a \in X\}$ az *identikus reláció.*

5. Lássuk be, hogy egy ρ reláció akkor és csak akkor

   (a) reflexív, ha $\omega \subseteq \rho$;

   (b) szimmetrikus, ha $\rho^{-1} \subseteq \rho$ vagy $\rho \subseteq \rho^{-1}$ vagy $\rho = \rho^{-1}$;

   (c) antiszimmetrikus, ha $\rho^{-1} \cap \rho = \omega$;

   (d) tranzitív, ha $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

• 6. Bizonyítsuk be, hogy $\rho \subseteq X \times X$ akkor és csak akkor ekvivalencia reláció, ha $\omega \subseteq \rho$ és $\rho \circ \rho^{-1} \subseteq \rho$.

7. Legyen ρ binér reláció, $\rho^0 := \omega$ és $n \geq 1$ esetén $\rho^n := \rho^{n-1} \circ \rho$. Mutassuk meg, hogy ρ tranzitív lezártja éppen

$$\rho^+ := \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n,$$

   azaz ρ^+ tranzitív, és bármely ρ-t tartalmazó tranzitív reláció tartalmazza ρ^+-t is. Mi lehet ρ reflexív lezártja?

• 8. Legyen $F \subseteq X \times Y$ megfeleltetés. Bizonyítsuk be, hogy

   (a) F pontosan akkor leképezés, ha teljesül $\omega_X \subseteq F \circ F^{-1}$ és $\omega_Y \supseteq F^{-1} \circ F$;

   (b) amennyiben F leképezés, úgy F injektív $\iff \omega_X = F \circ F^{-1}$;

   (c) amennyiben F leképezés, úgy F szürjektív $\iff \omega_Y = F^{-1} \circ F$;

9. Igazoljuk, hogy szürjektív leképezések kompozíciója szürjektív, injektíveké injektív, bijektíveké bijektív.