Algebra 1. 2004/2005 tavasz
2. gyakorlat: Algebrai struktúrák, részstruktúrák, kongruencia relációk

1. Igazoljuk, hogy homomorfizmusok kompozíciója homomorfizmus.

2. Keressük meg az $(A;\cdot)$ algebra összes minimális generátorrendszerét és részalgebráját, ha $A=\{a,b,c\}$ és a művelettábla:

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	b
b	c	b	b
c	a	b	a

   Hogyan változnak meg ezek, ha az a konstans hozzávételével megváltoztatjuk az algebra típusát, tehát az $(A;\cdot,a)$ struktúrát tekintjük?

3. Lássuk be, hogy az egészek modulo m kongruenciája a $(\mathbb{Z};\cdot,+,-,1,0)$ gyűrűnek kongruencia relációja.

4. Tekintsük a $(\mathbb{Z},\cdot)$ algebrai struktúra következő ρ relációját: $(a,b)\in\rho \iff$ a és b prímtényezős felbontásában az 5 azonos hatványon szerepel. Kongruencia reláció-e ρ? És ha 5 helyett 6-tal definiálnánk?

• 5. Legyen V vektortér, W egy altere és $\rho=\{(\mathbf{v},\mathbf{u})\in V^2 : \mathbf{v}+W=\mathbf{u}+W\}$, tehát ρ az azonos W szerinti eltoltban levő vektorok között áll fent. Bizonyítsuk be, hogy ρ a vektortér kongruenciája.

$\iota=A\times A$ az A halmaz *univerzális relációja*.

Egy algebrai struktúra *egyszerű*, ha ι-n és ω-n kívül nincs más kongruenciája.

• 6. Legyen f homomorfizmus, ekkor $\operatorname{Ker} f$ jelöli azt a relációt, amelyre $(a,b)\in\operatorname{Ker} f \iff f(a)=f(b)$.

   (a) Mutassuk meg, hogy $\operatorname{Ker} f$ kongruencia, és f pontosan akkor injektív, ha $\operatorname{Ker} f=\omega$.

   (b) Bizonyítsuk be, hogy egyszerű algebrának minden önmagába menő nem konstans leképezése injektív.

Egy algebrai struktúrát *unér*nek nevezünk, ha minden művelete egyváltozós.

7. Legyen A unér algebra és B egy részalgebrája.

   (a) Definiáljuk a ρ relációt a következőképpen: $(a,b)\in\rho \iff a=b$ vagy $a,b\in B$. Mutassuk meg, hogy ρ kongruencia.

   (b) Igazoljuk, hogy ha A egyszerű, akkor nincs legalább két elemet tartalmazó valódi $(B\lneq A)$ részalgebrája.

8. Tegyük fel, hogy egy A unér algebrai struktúrának van véges minimiális generátorrendszere. Lássuk be, hogy ekkor A minden minimális generátorrendszere azonos elemszámú.

• 9. Mutassuk meg, hogy ha egy algebra minden végesen generált részalgebrája egyszerű, akkor maga is egyszerű.