Algebra 1. 2004/2005 tavasz
7. gyakorlat: Permutációk, permutációcsoportok

1. Adjuk meg a következő permutációk diszjunkt-ciklus felbontását!
   (a) $(12345)^{-1}(123)(45)(12345)$
   (b) $(123)(124)(125)\dots(12n)$

• 2. Bizonyítsuk be, hogy
   (a) Ha bármely i elemet a σ és τ permutációk közül legfeljebb az egyik mozgatja, akkor σ és τ felcserélhetőek.
   (b) Ha σ diszjunkt-ciklus felbontásában $m_1, m_2, \dots, m_r$ hosszú ciklusok szerepelnek, akkor σ rendje $m_1, m_2, \dots, m_r$ legkisebb közös többszöröse.

   Ennek segítségével határozzuk meg, hogy hányadrendű elemek vannak S_4-ben és S_5-ben.

Legyen σ előjele $\mathrm{sg}(\sigma)$, amely 1, ha σ páros, -1, ha páratlan permutáció. Teljesül $\mathrm{sg}(\sigma\tau) = \mathrm{sg}(\sigma)\,\mathrm{sg}(\tau)$. (ld pl `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/algebrabook/Abstract_Algebra_380.pdf`, 149. oldal)

3. Mutassuk meg, hogy egy permutáció pontosan akkor páros, ha valamely ciklusfelbontásában páros sok páros hosszúságú ciklus van. A következő állítások igazolása segít.
   (a) Az $(a_1 a_2 \dots a_m)$ ciklust alkalmas elemmel konjugálva megkapjuk az $(12\dots m)$ ciklust.
   (b) Egy ciklus pontosan akkor páros permutáció, ha hossza páratlan.

4. Milyen rendű elemek vannak A_5-ben? Mutassuk meg, hogy A_4-nek nincs hat elemű részcsoportja.

• 5. Igazoljuk, hogy $D_3 \cong S_3$.

Ha $G \leq S_n$ egy permutációcsoport, akkor $G(i) := \{\sigma(i) : \sigma \in G\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ az i *pont orbitja.* Azon G-beli elemek G_i részcsoportja, amik i-t fixen hagyják az i *stabilizátora* (tehát $G_i = \{\sigma \in G : \sigma(i) = i\}$).

6. Mutassuk meg, hogy $|G(i)| = |G : G_i|$.

7. Hány elemű azon csoport, amely a kockát önmagába képező egybevágósági transzformációkból áll?

• 8. Igazoljuk, hogy a szabályos tetraédert önmagába képező egybevágósági transzformációk csoportja izomorf S_4-gyel.