Algebra 1. 2004/2005 tavasz
12. gyakorlat: Kiválasztási axióma, Zorn-lemma

Legyen Λ tetszőleges halmaz (indexhalmaz) és minden $i \in \Lambda$ esetén A_i egy halmaz. Az A_i halmazok dirket szorzata

$$\mathop{\times}_{i\in\Lambda} A_i := \left\{ f\colon \Lambda \to \bigcup_{i\in\Lambda} A_i \;\middle|\; f(i) \in A_i \right\},$$

elemei a *kiválasztási függvény*ek.

Kiválasztási axióma: Ha egyik A_i sem az üreshalmaz, akkor $\mathop{\times}_{i\in\Lambda} A_i \neq \emptyset$.

Zorn-lemma: Legyen $\mathcal{A} \neq \emptyset$ halmaz, rajta $\leq$ egy részbenrendezési reláció. Ha teljesül, hogy minden $a_1, a_2, \dots \in \mathcal{A}$, $a_1 \leq a_2 \leq \dots$ *lánc* esetén van olyan $a \in \mathcal{A}$, amely minden i-re $a_i \leq a$ (minden láncnak van felső korlátja), akkor van $\mathcal{A}$-ban maximális elem.

1. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítás következik a Zorn-lemmából:
   (**Kuratowski-lemma**) Tetszőleges $(\mathcal{A}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak van maximális rendezett részhalmaza.
   Igaz az is, hogy a Kuratowski-lemmából következik a Zorn-lemma, érdemes a bizonyításon egy kicsit gondolkodni.

- 2. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítás ekvivalens a Zorn-lemmával:
   (**Teichmüller–Tukey-lemma**) Legyen A halmaz, Φ az A véges részhalmazain értelmezett tulajdonság, $B \subseteq A$, amely minden véges részhalmaza Φ tulajdonságú. Ekkor van A-nak maximális olyan M részhalmaza, amely tartalmazza B-t és minden véges részhalmaza Φ tulajdonságú.
   (Az előző feladat nem bizonyított részét is felhasználhatjuk.)

3. Igazoljuk, hogy a Zorn-lemmából következik a kiválasztási axióma. (A fordított irány is igaz, de az nehezebb.)
   (Útmutatás: Definiáljuk a következő $\mathcal{A}$ részbenrendezett halmazt: minden $\Lambda' \subseteq \Lambda$-ra és $f \in \mathop{\times}_{i\in\Lambda'} A_i$-re legyen az $\left(f, \mathop{\times}_{i\in\Lambda'} A_i\right)$ pár az $\mathcal{A}$ eleme. A rendezés: $\left(f_1, \mathop{\times}_{i\in\Lambda_1} A_i\right) \leq \left(f_2, \mathop{\times}_{i\in\Lambda_2} A_i\right)$, ha $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$ és f_2 az f_1 kiterjesztése Λ_2-re.)

A továbbiakban feltételezzük, hogy igaz a kiválasztási axióma.

- 4. Legyen $(\mathcal{A}, \leq)$ részbenrendezett halmaz, és $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{B}$ független részhalmaz, ha semelyik két eleme nem összehasonlítható. Mutassuk meg, hogy minden részbenrendezett halmaznak van maximális független részhalmaza.

- 5. Egy algebrai struktúra ρ kongruenciája maximális, ha ρ nem a ι univerzális reláció és amennyiben egy η kongruenciára $\rho \subseteq \eta \subsetneq \iota$, akkor biztosan $\rho = \eta$.
   Tegyük fel, hogy A algebra olyan, hogy valamely $a, b \in A$ elemekre ha ρ az A kongruenciája és $(a, b) \in \rho$, akkor $\rho = \iota$. (Például tetszőleges egységelemes gyűrűben 0, 1 ilyen elemek.) Lássuk be, hogy A minden valódi kongruenciája része A egy maximális kongruenciájának.

6. Mutassuk meg, hogy tetszőleges vektortérben létezik bázis. (Bázis egy lineárisan független generátorrendszer.)