

## Algebra 1., gyakIV

2005 május 23.

1. Tegyük fel, hogy  $\rho$  és  $\eta$  relációkra  $\rho \circ \eta = \rho$  és  $\eta \circ \rho = \eta$ . Lássuk be, hogy  $\rho$  tranzitív.
2. Legyen  $G$  véges csoport és  $H \leq K \leq G$  részcsoportok. Bizonyítsuk be, hogy  $[G : K]$  osztója  $[G : H]$ -nak.
3. Normálosztó-e a 16 elemű  $D_8$  diédercsoportban a  $t$  és  $tf^6$  elemek által generált részcsoport?
4. Adjuk meg, hogy  $S_4$ -ben milyen rendű elemből hány van.
5. Hány 15-ödrendű eleme lehet egy 30 elemű kommutatív csoportnak?
6. Legyen  $G$  100 elemű csoport és  $P \trianglelefteq G$  4 elemű normálosztója. Bizonyítsuk be, hogy  $G$  Ábel-csoport.
7. Igazoljuk, hogy egy egységelemes  $R$  gyűrű  $I$  ideáljára az alábbi állítások ekvivalensek.
  - (a)  $I$ -ben van invertálható elem.
  - (b)  $R = I$ .
  - (c)  $R$  minden invertálható eleme  $I$ -ben van.
  - (d)  $1 \in I$  (1 a gyűrű egységeleme).
8. Bizonyítsuk be, hogy a Zorn-lemma ekvivalens a következő állítással. Ha  $(A, \leq)$  nemüres részbenrendezett halmazban minden  $a_1 \geq a_2 \geq \dots$  csökkenő láncnak van alsó korlátja, akkor  $\exists a \in A$  minimális elem.

Munkaidő 100 perc. A feladatok nem feltétlenül nehézségi sorrendben vannak.

Minden feladat hibátlan megoldása 10 pontot ér.

Figyeljete a válaszok precíz indoklására!

Osztályozás: 0-31: 1, 32-43: 2, 44-55: 3, 56-67: 4, 68-80: 5.