

Algebra 1., pót-gyakIV

2005 június 06.

1. Legyen A unér algebra (azaz minden művelte egyváltozós) és B egy részalgebrája. Definiáljuk a ρ relációt a következőképpen:

$$(a, b) \in \rho \iff a = b \text{ vagy } a, b \in B.$$

Mutassuk meg, hogy ρ kongruencia.

2. Igazoljuk, hogy egy csoport prím indexű részcsoportha biztosan maximális részcsoportha.
3. Legyen G csoport, $H \leq G$ és $N \trianglelefteq G$. Bizonyítsuk be, hogy $[N : H \cap N] = [NH : H]$.
4. Legyen N az A_4 alternáló csoport legfeljebb másodrendű elemeiből álló normálosztó. Milyen csoporttal izomorf A_4/N ? (Azt nem kell megmutatni, hogy N valóban normálosztó.)
5. Soroljuk fel az összes páronként nem izomorf 80 elemű kommutatív csoportot. Melyiknek van a legtöbb 10-edrendű eleme?
6. Hány 2-Sylowja és 5-Sylowja lehet egy 10 elemű csoportnak? (Mutasunk is példákat csoportokra, hogy a kiszámolt értékek valóban előfordulhatnak.)
7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gyűrűnek minden eleme idempotens ($a^2 = a$), akkor a gyűrű kommutatív.

Munkaidő 100 perc. A feladatok nem feltétlenül nehézségi sorrendben vannak.

Minden feladat hibátlan megoldása 10 pontot ér.

Figyeljete a válaszok precíz indoklására!

Osztályozás: 0-29: 1, 30-37: 2, 38-45: 3, 46-52: 4, 53-70: 5.