Algebra 1., gyakIV megoldások
2005 május 23.

1. Tegyük fel, hogy ρ és η relációkra $\rho \circ \eta = \rho$ és $\eta \circ \rho = \eta$. Lássuk be, hogy ρ tranzitív.

   Megoldás:
   $\rho \circ \rho = (\rho \circ \eta) \circ \rho = \rho \circ (\eta \circ \rho) = \rho \circ \eta = \rho$, azaz $\rho \circ \rho = \rho$, ez éppen ρ tranzitivitását jelenti.

2. Legyen G véges csoport és $H \leq K \leq G$ részcsoportok. Bizonyítsuk be, hogy $[G:K]$ osztója $[G:H]$-nak.

   Megoldás:
   $$\frac{[G:H]}{[G:K]} = \frac{\frac{|G|}{|H|}}{\frac{|G|}{|K|}} = \frac{|K|}{|H|} = [K:H],$$
   ami egész szám (és H részcsoportja K-nak, tehát értelmes).

3. Normálosztó-e a 16 elemű D_8 diédercsoportban a t és tf^6 elemek által generált részcsoport?

   Megoldás:
   Megmutatjuk, hogy $H := \langle t, f^6 \rangle \geq \{e, f^2, f^4, f^6, t, tf^2, tf^4, tf^6\}$. Ha ez valóban igaz, akkor $[D_8 : H] \leq 2$, és egy kettő vagy egy indexű részcsoport pedig biztosan normálosztó. És valóban: $t \in H$, $f^2 = (t \cdot tf^6)^{-1} \in H$, így a többi felsorolt elem is H-ban van. (Nem nehéz belátni, hogy a fenti igazából egyenlőséggel teljesül.)

4. Adjuk meg, hogy S_4-ben milyen rendű elemből hány van.

   Megoldás:
   Tanultuk, hogy a diszjunkt-ciklus felbontás egyértelműen meghatározza a permutációk rendjét: a ciklusok hosszainak legkisebb közös többszöröse a rend. A ciklushossz lehet 4, 3, 2, 2+2. Az adott hosszú ciklusokba kiosztva a számokat van $3 \cdot 2 = 6$ négy-ciklus, $4 \cdot 2 = 8$ három-ciklus, $\binom{4}{2} = 6$ kettő-ciklus és 3 olyan permutáció, amely két kettő hosszú diszjunkt ciklusból áll. Ezek szerint 6 negyedrendű, 8 harmadrendű, 9 másodrendű és persze 1 elsőrendű elem van S_4-ben.

5. Hány 15-ödrendű eleme lehet egy 30 elemű kommutatív csoportnak?

   Megoldás:
   A véges Ábel-csoportok alaptétele miatt 30 elemű kommutatív csoport csak $C_2 \times C_3 \times C_5$ lehet. Ennek egy (g_2, g_3, g_5) eleme pontosan akkor 15-ödrendű, ha $o(g_2)$, $o(g_3)$ és $o(g_5)$ legkisebb közös többszöröse 15, ami csakis úgy fordulhat elő, ha $o(g_2) = 1$, $o(g_3) = 3$ és $o(g_5) = 5$. Tehát g_2-re egyetlen lehetőségünk van, míg g_3 a C_3, g_5 a C_5 tetszőleges generátora lehet, azaz 2, illetve 4 féle. Ez összesen $1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$ elem.

   A fenti direkt szorzat izomorf C_{30}-cal. Ha ennek g egy generátora, akkor $o\left(g^k\right) = \frac{30}{(30,k)}$, tehát a 15-ödrendű elemeket úgy is meghatározhattuk volna, ha az olyan 1 és 30 közötti k-kat számoljuk össze, amelyekre $(30, k) = 2$. Ebből nyilván $\varphi(15) = 8$ van.

6. Legyen G 100 elemű csoport és $P \trianglelefteq G$ 4 elemű normálosztója. Bizonyítsuk be, hogy G Ábel-csoport.

   Megoldás:
   $|G| = 2^2 5^2$, tehát P éppen egy 2-Sylowja G-nek. (És miután minden 2-Sylow előáll P konjugáltjaként, de $g^{-1}Pg = P$, ezért ez az egyetlen 2-Sylow.) Ha n_5 jelöli az 5-Sylowok számát és P_5 egy 5-Sylow, akkor egyrészt $n_5 = [G : N_G(P_5)]$ miatt $n_5 \mid \frac{100}{5^2} = 4$, másrészt a második Sylow-tétel szerint $n_5 \equiv 1$ (5), tehát $n_5 = 1$. Ezek szerint P_5 – az egyetlen 5-Sylow – normálosztó, hiszen konjugáltjai is 5-Sylowok. Így $P \times P_5 = G$. Minden p^2 rendű csoport kommutatív (mert a centruma nem lehet triviális, sem p elemű), tehát P és P_5 is kommutatív, így direkt szorzatuk is az.

7. Igazoljuk, hogy egy egységelemes R gyűrű I ideáljára az alábbi állítások ekvivalensek.

   (a) I-ben van invertálható elem.

   (b) $R = I$.

   (c) R minden invertálható eleme I-ben van.

   (d) $1 \in I$ (1 a gyűrű egységeleme).

   Megoldás:
   (a)$\Rightarrow$(b) Ha $r \in I$ invertálható elem, akkor minden $a \in R$ előáll $a = r \cdot (r^{-1}a)$ alakban. Utóbbi szorzat első tényezője I-ben van, tehát a szorzat is I-ben van: $a \in I$. Ezek szerint $I = R$.

   A (b)$\Rightarrow$(c) triviális. Az 1 invertálhatóságából következik a (c)$\Rightarrow$(d) és a (d)$\Rightarrow$(a) állítás is.

8. Bizonyítsuk be, hogy a Zorn-lemma ekvivalens a következő állítással. Ha $(A, \leq)$ nemüres részbenrendezett halmazban minden $a_1 \geq a_2 \geq \ldots$ csökkenő láncnak van alsó korlátja, akkor $\exists a \in A$ minimális elem.

   Megoldás:
   Definiálunk egy másik részbenrendezést A-n. Legyen $a \preceq b$ pontosan akkor, ha $b \leq a$. Triviális, hogy $\preceq$ valóban részbenrendezés.

   Az $a_1 \geq a_2 \geq \ldots$ csökkenő lánc a másik rendezés szerint éppen egy $a_1 \preceq a_2 \preceq \ldots$ növő lánc. Előbbi $\leq$ szerinti alsó korlátja az utóbbi $\preceq$ szerint felső korlátja, hiszen $a \leq a_i$ akkor és csak akkor, ha $a_i \preceq a$. Hasonlóan, $(A, \leq)$ minimális elemei ugyanazok, mint $(A, \preceq)$ maximális elemei.

   Ezek után az állítások ekvivalenciája világos. Ha igaz a Zorn-lemma, akkor alkalmazzuk azt $(A, \preceq)$ halmazra. A Zorn-lemma feltétele teljesül, hiszen a $\leq$-re szóló láncfeltétel éppen azt mondja ki. Tehát van $\preceq$-re nézve maximális elem, ami $(A, \leq)$ egy minimális eleme. A megfordítás ugyanígy megy: A Zorn-lemmában szereplő rendezett halmazt $(A, \preceq)$-vel jelölve definiálható a részbenrendezés $\leq$ megfordítása.