Algebra 1., első PZH megoldások

2005 április 20

1. Igazoljuk, hogy amennyiben ρ és η relációkra $\eta \circ \rho = \rho \circ \eta = \omega$ teljesül, akkor $\eta = \rho^{-1}$.

   Megoldás:
   Először megmutatjuk, hogy $\omega \subseteq \rho^{-1} \circ \rho$. Tetszőleges a elemre $(a, a) \in \omega = \eta \circ \rho$, ezért létezik b, amelyre $(b, a) \in \rho$. Ilyenkor persze $(a, b) \in \rho^{-1}$, tehát $(a, a) \in \rho^{-1} \circ \rho$ is igaz.

   A feltétel miatt $\rho^{-1} \circ \rho \circ \eta = \rho^{-1} \circ \omega = \rho^{-1}$. Ez $\omega \subseteq \rho^{-1} \circ \rho$-val együtt, adja, hogy $\eta = \omega \circ \eta \subseteq (\rho^{-1} \circ \rho) \circ \eta = \rho^{-1}$. Ugyanígy jön ki az is, hogy $\rho \subseteq \eta^{-1}$ (itt $\omega \subseteq \eta \circ \eta^{-1}$-et kell használni), amiből $\rho^{-1} \subseteq \eta$ következik. Tehát $\rho = \eta$.

2. Legyen A és B azonos típusú algebrai struktúra, $\varphi \colon A \to B$ homomorfizmus. Tegyük fel, hogy B-nek nincs valódi részstruktúrája (tehát egyetlen részstruktúrája önmaga). Bizonyítsuk be, hogy φ szürjektív.

   Megoldás:
   Megmutatjuk, hogy $\varphi(A)$ részstruktúrája B-nek. Ha ez igaz, akkor a feltétel szerint csak $\varphi(A) = B$ lehet, így φ szürjektív. Miután $\varphi(A) \subseteq B$, ezért csak azt kell ellenőriznünk, hogy $\varphi(A)$ zárt a műveletekre. Legyen f_n tetszőleges n változós művelet és $a_1 \ldots, a_n \in A$. Ekkor $f_n(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) = \varphi(f_n(a_1, \ldots, a_n))$, hiszen φ homomorfizmus. A jobb oldal nyilván $\varphi(A)$ eleme, tehát f_n nem vezet ki $\varphi(A)$-ból.

3. Legyen S félcsoport és n egy S-en kívüli elem. Definiáljunk a $T := S \cup \{n\}$ halmazon egy szorzást, amely S elemein az eredeti szorzással egyezik meg, és $n \cdot x = x \cdot n = n$ minden $x \in T$-re. Bizonyítsuk be, hogy T félcsoport.

   Megoldás:
   Az asszociativitást kell igazolnunk. Ha három S-beli elemet szorzunk össze, akkor mindkét módon zárójelezve a szorzat ugyanaz, mint S-ben, tehát egyenlő is. Ha a három összeszorzandó elem között szerepel n is, akkor a szorzás eredménye mindenképpen n lesz, tehát az átzárójelezhetőség ekkor is igaz.

4. Legyen H és K a G csoport két részcsoportja. Igazoljuk, hogy HK akkor és csak akkor részcsoport, ha $HK = KH$.

   Megoldás:
   Ha $HK = KH$, akkor $(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH = HK$ és $(HK)(HK) = H(KH)K = H(HK)K = (HH)(KK) = HK$, tehát HK részcsoport.

   Megfordítva, ha HK részcsoport, akkor $HK = (HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH$, tehát felcserélhetőek.

5. Igazoljuk, hogy egy G ciklikus csoportban nincs

   $$H_1 \lneq H_2 \lneq H_3 \lneq \ldots$$

   részcsoportokból álló végtelen hosszú lánc.

1. megoldás:
Ha G véges, akkor véges sok részcsoportja van, tehát ekkor nincs mit bizonyítani. Tegyük fel tehát, hogy G végtelen ciklikus csoport, és indirekt tegyük fel, hogy $H_1 \lneq H_2 \lneq H_3 \lneq \dots$ részcsoportjainak végtelen lánca.

Tanultuk, hogy ciklikus csoport részcsoportja ciklikus, tehát legyen $H_i = \langle g^{n_i} \rangle$, ahol g a G egy generátora és $n_i > 0$. De minden $i \geq 1$-re $H_i \leq H_{i+1}$, így $g^{n_i} \in \langle g^{n_{i+1}} \rangle$, azaz n_{i+1} osztója n_i-nek. Tehát $n_1 > n_2 > n_3 > \dots > n_i > n_{i+1} > \dots$ pozitív egészek végtelen csökkenő sorozatát kaptuk, ez ellentmondás.

2. megoldás:
Megint tegyük fel indirekt, hogy van végtelen lánc. Egy ciklikus csoport kommutatív, így $H_1 \trianglelefteq G$. Az izomorfizmus tételek környékén tanultak szerint ekkor a G/H_1 faktorcsoport részcsoportjainak egy végtelen növő láncát kapjuk:

$$\{e\} = H_1/H_1 \lneq H_2/H_1 \lneq H_3/H_1 \lneq \dots \leq G/H_1$$

De azt is tanultuk, hogy ciklikus csoport részcsoportja véges indexű, ezért G/H_1 véges csoport, amiben nem lehet végtelen sok különböző részcsoport.

6. Milyen ismert csoporttal izomorf a $D_{16}/\langle f^4, t \rangle$ faktorcsoport?

1. megoldás:
Bebizonyítjuk, hogy a faktorcsoport elemeinek egy reprezentáns rendszere $e = f^0, f, f^2, f^3$. Legyen $N = \langle f^4, t \rangle$. A megadott elemek közül semelyik kettő nem definiálhat azonos N szerinti mellékosztályt, ugyanis ha $f^i N = f^j N$, akkor $f^{i-j} \in N$, tehát $i-j$ 4-gyel osztható volna, ami lehetetlen, ha $0 \leq i, j \leq 4$ különböző. Másrészt több, páronként különböző mellékosztályt reprezentáló elemet nem is találhatunk, mert N indexe 4, hiszen $N = \{e, f^4, f^8, f^{12}, t, tf^4, tf^8, tf^{12}\}$ (könnyen ellenőrizhető $f^4 t = t f^{12}$), tehát $|D_{16}/N| = \frac{32}{8} = 4$.

Ezek szerint $D_{16}/N \cong C_4$.

2. megoldás:
Legyen $N = \langle f^4, t \rangle$ ismét és legyen $H = \langle f \rangle$. Ekkor $NH = D_{16}$, mert $f, t \in NH$ és ez a két elem már generálja D_{16}-ot. Látszik, hogy $N \cap H = \langle f^4 \rangle$. Az első izomorfia tételt alkalmazva

$$G/N = NH/N \cong H/(N \cap H) = \langle f \rangle / \left\langle f^4 \right\rangle \cong C_4.$$

7. Legyen T négyzet alapú téglatest, amely nem kocka, G pedig a tér azon egybevágósági transzformációinak csoportja, amelyek T téglatestet önmagába viszik. Hány elemű G?

Megoldás:
A csúcsokat megszámozva 1-től 8-ig, tekinthetjük G csoportot 8 jegyen ható permutációcsoportnak, azaz $G \leq S_8$. Ekkor $|G| = |G_1| \cdot |G : G_1| = |G_1| \cdot |G(1)|$. Az 1 csúcs tetszőleges másikba átvihető: a két négyzetlap középpontját összekötő egyenes körül forgatva, illetve a két négyzetlappal párhuzamos és tőlük egyenlő távol levő síkra tükrözve valóban mindenhova elvihetjük. Így $|G(1)| = 8$. Hasonló módon tovább számolva $|G_1| = |G_{1,2}| \cdot |G_1(2)|$, ahol 2 az 1 csúcs olyan szomszédja, amely

vele azonos négyzetlapon van. Nyilván $|G_1(2)| = 2$, mert a 2 az 1 olyan szomszédaiba vihető át, amelyek 1-gyel azonos négyzetlapon vannak. Végül $|G_{1,2}| = 1$, mert ekkor az 1 csúcs vele azonos négyzetlapon levő másik szomszédja is helyben kell maradjon. Azt kaptuk, hogy $|G| = 16$.

Másképpen is számolhattunk volna. Egy transzformáció a két négyzetlapot vagy felcseréli, vagy nem. Emiatt a téglatestnek pont kétszer annyi egybevágósági transzformációja van, mint a négyzetnek, tehát $|G| = 2 \cdot |D_4| = 16$.