Algebra 1., második PZH megoldások

2005 május 23.

1. Legyen $N \trianglelefteq S_3$ az (123) ciklus által generált részcsoport. Lássuk be, hogy $S_3/N \times N \not\cong S_3$.

   Megoldás:
   Világos, hogy $N \cong C_3$ és $|S_3/N| = 2$ miatt $S_3/N \cong C_2$. Ezért $S_3/N \times N \cong C_2 \times C_3$, ami Ábel-csoport, tehát nem lehet izomorf S_3-mal.

2. Mutassuk meg, hogy $C(G_1 \times G_2) = C(G_1) \times C(G_2)$.

   Megoldás:
   Ha $(c_1, c_2) \in C(G_1 \times G_2)$, akkor minden $g_1 \in G_1$ és $g_2 \in G_2$ esetén $(g_1, g_2)(c_1, c_2) = (c_1, c_2)(g_1, g_2)$, azaz $(g_1c_1, g_2c_2) = (c_1g_1, c_2g_2)$, így $g_1c_1 = c_1g_1$ és $g_2c_2 = c_2g_2$. Ezért $c_1 \in C(G_1)$ és $c_2 \in C(G_2)$, tehát $(c_1, c_2) \in C(G_1) \times C(G_2)$.

   A fordított irányú tartalmazáshoz legyen $(c_1, c_2) \in C(G_1) \times C(G_2)$, azaz $c_1 \in C(G_1)$ és $c_2 \in C(G_2)$. Ekkor minden $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$-re $(c_1, c_2)(g_1, g_2) = (c_1g_1, c_2g_2) = (g_1c_1, g_2c_2) = (g_1, g_2)(c_1, c_2)$, így $(c_1, c_2) \in C(G_1 \times G_2)$.

3. Hány 15-ödrendű eleme lehet egy 30 elemű kommutatív csoportnak?

   Megoldás:
   A véges Ábel-csoportok alaptétele miatt 30 elemű kommutatív csoport csak $C_2 \times C_3 \times C_5$ lehet. Ennek egy (g_2, g_3, g_5) eleme pontosan akkor 15-ödrendű, ha $\mathrm{o}(g_2)$, $\mathrm{o}(g_3)$ és $\mathrm{o}(g_5)$ legkisebb közös többszöröse 15, ami csakis úgy fordulhat elő, ha $\mathrm{o}(g_2) = 1$, $\mathrm{o}(g_3) = 3$ és $\mathrm{o}(g_5) = 5$. Tehát g_2-re egyetlen lehetőségünk van, míg g_3 a C_3, g_5 a C_5 tetszőleges generátora lehet, azaz 2, illetve 4 féle. Ez összesen $1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$ elem.

   A fenti direkt szorzat izomorf C_{30}-cal. Ha ennek g egy generátora, akkor $\mathrm{o}\left(g^k\right) = \frac{30}{(30,k)}$, tehát a 15-ödrendű elemeket úgy is meghatározhattuk volna, ha az olyan 1 és 30 közötti k-kat számoljuk össze, amelyekre $(30, k) = 2$. Ebből nyilván $\varphi(15) = 8$ van.

4. Álljon G az F test feletti 3×3-as olyan felső háromszögmátrixokból, amelyek főátlójában csupa 1 áll. Mi G centruma?

   Megoldás:
   Két tetszőleges $A, B \in G$ mátrixot összeszorozva könnyű látni, hogy $AB = BA$ pontosan akkor, ha $a_{1,2}b_{2,1} = a_{2,1}b_{1,2}$. Ezek szerint $A \in C(G)$ pontosan akkor, ha minden $b, b' \in F$-re $a_{1,2}b = a_{2,1}b'$. Innen $b' = 0$, $b = 1$ választással adódik $a_{1,2} = 0$, $b' = 1$, $b = 0$-val pedig $a_{2,1} = 0$. Ekkor persze minden más $b, b' \in F$ esetén is fennáll az egyenlőség. Tehát $A \in C(G) \iff a_{1,2} = a_{2,1} = 0$.

5. Legyen G 100 elemű csoport, amelynek van $P \trianglelefteq G$ 4 elemű normálosztója. Bizonyítsuk be, hogy G Ábel-csoport.

   Megoldás:
   $|G| = 2^2 5^2$, tehát P éppen egy 2-Sylowja G-nek. (És miután minden 2-Sylow előáll P konjugáltjaként, de $g^{-1}Pg = P$, ezért ez az egyetlen 2-Sylow.) Ha n_5 jelöli

az 5-Sylowok számát és P_5 egy 5-Sylow, akkor egyrészt $n_5 = [G : N_G(P_5)]$ miatt $n_5 \mid \frac{100}{5^2} = 4$, másrészt a második Sylow-tétel szerint $n_5 \equiv 1 \ (5)$, tehát $n_5 = 1$. Ezek szerint P_5 – az egyetlen 5-Sylow – normálosztó, hiszen konjugáltjai is 5-Sylowok. Így $P \times P_5 = G$. Minden p^2 rendű csoport kommutatív (mert a centruma nem lehet triviális, sem p elemű), tehát P és P_5 is kommutatív, így direkt szorzatuk is az.

6. Igazoljuk, hogy egy egységelemes R gyűrű I ideáljára az alábbi állítások ekvivalensek.

   (a) I-ben van invertálható elem.

   (b) $R = I$.

   (c) R minden invertálható eleme I-ben van.

   (d) $1 \in I$ (1 a gyűrű egységeleme).

   Megoldás:
   (a)⇒(b) Ha $r \in I$ invertálható elem, akkor minden $a \in R$ előáll $a = r \cdot (r^{-1}a)$ alakban. Utóbbi szorzat első tényezője I-ben van, tehát a szorzat is I-ben van: $a \in I$. Ezek szerint $I = R$.

   A (b)⇒(c) triviális. Az 1 invertálhatóságából következik a (c)⇒(d) és a (d)⇒(a) állítás is.

7. Bizonyítsuk be, hogy a Zorn-lemma ekvivalens a következő állítással. Ha $(A, \leq)$ nemüres részbenrendezett halmazban minden $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ csökkenő láncnak van alsó korlátja, akkor $\exists a \in A$ minimális elem.

   Megoldás:
   Definiálunk egy másik részbenrendezést A-n. Legyen $a \preceq b$ pontosan akkor, ha $b \leq a$. Triviális, hogy $\preceq$ valóban részbenrendezés.

   Az $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ csökkenő lánc a másik rendezés szerint éppen egy $a_1 \preceq a_2 \preceq \dots$ növő lánc. Előbbi $\leq$ szerinti alsó korlátja az utóbbi $\preceq$ szerint felső korlátja, hiszen $a \leq a_i$ akkor és csak akkor, ha $a_i \preceq a$. Hasonlóan, $(A, \leq)$ minimális elemei ugyanazok, mint $(A, \preceq)$ maximális elemei.

   Ezek után az állítások ekvivalenciája világos. Ha igaz a Zorn-lemma, akkor alkalmazzuk azt $(A, \preceq)$ halmazra. A Zorn-lemma feltétele teljesül, hiszen a $\leq$-re szóló láncfeltétel éppen azt mondja ki. Tehát van $\preceq$-re nézve maximális elem, ami $(A, \leq)$ egy minimális eleme. A megfordítás ugyanígy megy: A Zorn-lemmában szereplő rendezett halmazt $(A, \preceq)$-vel jelölve definiálható a részbenrendezés $\leq$ megfordítása.