

Algebra 1., első ZH

2005 április 7.

1. Bizonyítsuk be, hogy ρ és η ekvivalenciarelációk $\rho \circ \eta$ szorzata pontosan akkor ekvivalencia, ha $\rho \circ \eta = \eta \circ \rho$.
2. (*Általános homomorfizáti tétel*) Legyen A algebrai struktúra és θ kongruenciareláció A -n. Definiáljuk A/θ algebrát a következő módon. Elemei legyenek θ ekvivalenciaosztályai, jelölje $a \in A$ osztályát $[a]_\theta$. Ha f_n egy A -n értelmezett művelet, akkor a megfelelő művelet A/θ algebrán az alábbi: $a_1, \dots, a_n \in A$ esetén $f_n([a_1]_\theta, \dots, [a_n]_\theta) := [f_n(a_1, \dots, a_n)]_\theta$.
 - (a) Mutassuk meg, hogy a definíció értelmes, tehát a művelet eredménye független attól, hogy az ekvivalenciaosztályokból mely elemeket választottuk reprezentánsnak.
 - (b) Legyen $\text{Ker } \varphi = \{(a, a') \in A^2 : \varphi(a) = \varphi(a')\}$ kongruencia és $\text{Im } \varphi = \varphi(A) = \{\varphi(a) : a \in A\}$. Igazoljuk, hogy amennyiben $\varphi: A \rightarrow B$ homomorfizmus, akkor $A/\text{Ker } \varphi \cong \text{Im } \varphi$.
3. Lássuk be, hogy a következő állítások ekvivalensek egy G csoport nemüres H részhalmazára:
 - (a) H részcsoport;
 - (b) $HH^{-1} \subseteq H$;
 - (c) $HH^{-1} = H$.
4. Legyen G csoport, H és K két véges részcsoportja. Bizonyítsuk be, hogy
 - (a) ha H és K rendje relatív prím, akkor $H \cap K = \{e\}$;
 - (b) ha K normálosztó, akkor

$$\frac{|K| \cdot |H|}{|H \cap K|} = |KH|.$$

5. Igazoljuk, hogy tetszőleges k, n pozitív egészekre D_k pontosan akkor homomorf képe D_n csoportnak, ha k osztója n -nek.
(Emlékeztetőül: D_n az n -edfokú diédercsoport, tehát

$$D_n = \{e, f, f^2, \dots, f^{n-1}, t, tf, tf^2, \dots, tf^{n-1}\}$$

és $f^n = e, t^2 = e, ft = tf^{n-1}$.)

6. Legyen $g \in S_n$ permutáció, amely az i jegyet $g(i)$ -be viszi, továbbá $(a_1 a_2 \dots a_m) \in S_n$ legyen egy ciklus. Mutassuk meg, hogy

$$g \cdot (a_1 a_2 \dots a_m) \cdot g^{-1} = (g(a_1) g(a_2) \dots g(a_m)).$$

Munkaidő 100 perc.

Minden feladat hibátlan megoldása 10 pontot ér. Figyeljete a válaszok precíz indoklására!

Osztályozás: 0-29: 1, 30-37: 2, 38-45: 3, 46-52: 4, 53-60: 5.