Algebra 1., második ZH

2005 május 19.

1. Bizonyítsuk be, hogy a $G \times G$ direkt szorzat $D = \{(g, g) \mid g \in G\}$ diagonális részcsoportja pontosan akkor normálosztó, ha G Ábel-csoport.
2. Hány olyan 300 elemű Ábel-csoport van, amiben van olyan elem, aminek a rendje 50?
3. Mutassunk olyan 8 elemű G Ábel-csoportot és $H_1 \leq G$, $H_2 \leq G$ részcsoportokat, amelyekre $H_1 \cong H_2$, de $G/H_1 \ncong G/H_2$.
4. Határozzuk meg $n > 1$-re A_n csoport centrumát!
5. Hány nem izomorf 153 elemű csoport van?
6. (a) Mutassuk meg, hogy R gyűrű pontosan akkor egyszerűsítéses, ha $R \setminus \{0\}$ halmaz a gyűrűbeli szorzással félcsoport.

   (b) Igazoljuk, hogy egy kommutatív egységelemes gyűrűben r pontosan akkor invertálható, ha $rR = R$.
7. A kiválasztási axióma feltevése mellett igazoljuk, hogy tetszőleges G csoportnak van maximális H kommutatív részcsoportja (tehát H Ábel-csoport, de bármilyen új elemet hozzávéve már nem marad az).

Munkaidő 100 perc. A feladatok nem feltétlenül nehézségi sorrendben vannak.
Minden feladat hibátlan megoldása 10 pontot ér, 60 pont számít 100%-nak.
Figyeljetek a válaszok precíz indoklására!