Algebra 1. 2009/2010 tavasz
4. gyakorlat: Lagrange tétele, normális részcsoportok, faktorcsoport

1. Bizonyítsuk be, hogy C_∞ minden nem triviális részcsoportja véges indexű.
2. Melyek igazak az alábbi következtetések közül?
   (a) Ha $|G| = 81$ és van olyan $g \in G$, amelyre $g^{29} \neq g^2$, akkor G ciklikus.
   (b) Ha $|G| = 54$ és van olyan $g \in G$, amelyre $g^{29} \neq g^2$, akkor G ciklikus.
   (c) Ha $|G| = 81$ és van olyan $g \in G$, amelyre $g^{29} = g^2$, akkor G nem ciklikus.
3. Igazoljuk, hogy egy $H \leq G$ részcsoportra $x \in G$ és $y \in G$ pontosan akkor vannak azonos H szerinti mellékosztályban, ha $y^{-1}x \in H$.
4. Igazoljuk, hogy rögzített $g \in G$-re a $\varphi_g \colon G \to G$, $\varphi_g : x \mapsto g^{-1}xg$ leképezés G automorfizmusa.
5. Mutassuk meg, hogy egy $K \subseteq G$ részhalmaz legfeljebb egy részcsoportnak lehet baloldali mellékosztálya, és ha K baloldali mellékosztály, akkor alkalmas részcsoport szerint jobboldali mellékosztály is.
6. Bizonyítsuk be, hogy egy 2 indexű részcsoport biztosan normálosztó.

• 7. Legyen $N \trianglelefteq G$ és $M \trianglelefteq G$ normális részcsoportok, amelyekre $N \cap M = 1$. Igazoljuk, hogy minden $n \in N$ és $m \in M$-re $mn = nm$.

8. Legyen G az $n \times n$-es invertálható mátrixok csoportja. Bizonyítsuk be, hogy ha $N \trianglelefteq G$ normálosztó, akkor minden $A \in N$ mátrixra A Jordan féle normálalakja is N-ben van.

• 9. Jelölje $GL_n(K)$ a K test feletti invertálható $n \times n$-es mátrixok multiplikatív csoportját. Az alábbiak közül melyek részcsoportok és melyek normális részcsoportok $GL_n(K)$-ban?
   (a) 1 determinánsú mátrixok;
   (b) $GL_n(K)$-beli felső háromszögmátrixok;
   (c) azon $GL_n(K)$-beli mátrixok, amelyeknek egy adott $\mathbf{v} \in K^n$ sajátvektora;
   (d) 0 nyomú invertálható mátrixok.

10. Milyen csoporttal izomorf G/N, ha
    (a) $G = \mathbb{Z}_{12}$ a modulo 12 maradékosztályok additív csoportja és $N = \{0, 4, 8\}$;
    (b) $G = \mathbb{C}$ a komplex számok additív csoportja és $N = \mathbb{R}$;
    (c) $G = \mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$ a komplex számok multiplikatív csoportja és $N = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$;
    (d) G a valós 3×3-as mátrixok additív csoportja és N azon mátrixok csoportja, amelyek főátlójában csupa 0 szerepel;
    (e) $G = \mathbb{R}$ a valós számok additív csoportja és $N = \mathbb{Z}$.
11. Legyen m összetett szám, amely nem álprím (van hozzá Fermat-tanú).
    (a) Igazoljuk, hogy az m-hez Fermat-cinkosok részcsoportot alkotnak $\mathbb{Z}_m^*$ csoportban.
    (b) Ezt felhasználva mutassuk meg, hogy m-hez legalább $\frac{\varphi(m)}{2}$ Fermat-tanú van. (A tanúk és cinkosok is definíció szerint m-hez relatív prímek.)
12. (*) Legyen H egy véges csoport részcsoportja. Mutassuk meg, hogy H bal- és jobboldali mellékosztályainak létezik közös reprezentáns rendszere.