Algebra 1. 2009/2010 tavasz
5. gyakorlat: Homomorfizmusok, normálosztók

1. Legyen G csoport, $H \leq G$ részcsoport. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
   (a) Mindig van olyan homomorfizmus G-ről, amely magja H.
   (b) Mindig van olyan homomorfizmus G-be, amely képe H.
   (c) Tetszőleges $\varphi\colon G \to G'$ homomorfizmus esetén $\varphi(H)$ részcsoportja G'-nek.
   (d) Ha H normálosztó G-ben, akkor $\varphi(H)$ normálosztó G'-ben.
   (e) Ha H normálosztó G-ben, akkor $\varphi(H)$ normálosztó $\varphi(G)$-ben.
   (f) Ha $H \trianglelefteq G$, akkor van olyan G' csoport és $\varphi\colon G \to G'$ homomorfizmus, amely magja H.
   (g) Tetszőleges $\varphi\colon G \to G'$ homomorfizmusra ha n osztója $|G|$-nak, akkor n osztója $|\varphi(G)|$-nak (véges csoportok esetén).
   (h) Tetszőleges $\varphi\colon G \to G'$ homomorfizmusra ha n osztója $|\varphi(G)|$-nak, akkor n osztója $|G|$-nak (véges csoportok esetén).
2. Tegyük fel, hogy $H \leq G$, $M, N \trianglelefteq G$. Bizonyítsuk be, hogy $H \cap N \trianglelefteq H$, $HN \leq G$ és $NM \trianglelefteq G$.
3. Bizonyítsuk be, hogy ha $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$, $H \cap N = \{e\}$ és $HN = G$, akkor $G/N \cong H$.
4. Igazoljuk, hogy ha $M, N \trianglelefteq G$, $M \leq N$, akkor G/N homomorf képe G/M-nek.
5. Mutassuk meg, hogy $N \trianglelefteq G$, $N \leq H \leq G$ esetén $H \trianglelefteq G$ és $H/N \trianglelefteq G/N$ ekvivalens.

• 6. Legyen $N \trianglelefteq G$ és $H_1 \trianglelefteq H_2 \leq G$. Bizonyítsuk be, hogy
   (a) $(H_2 \cap N)/(H_1 \cap N)$ normálosztóként beágyazható H_2/H_1-be;
   (b) H_2N/H_1N homomorf képe H_2/H_1-nek.

Legyen D_4 a szabályos négyszöget önmagába képező síktranszformációk csoportja (*negyedfokú diédercsoport*).

Legyen Q a *kvaterniócsoport*, azaz $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$, a műveleteket pedig a következő relációk adják meg: 1 az egységelem, $(-1)^2 = 1$, $(-1)\ell = \ell(-1) = -\ell$, $\ell^2 = -1$, ahol ℓ az i, j, k bármelyike lehet, végül $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ és $ki = -ik = j$.

7. Bizonyítsuk be, hogy Q-nak nincs C_4-gyel izomorf faktorcsoportja.
8. Adjunk példát $M \trianglelefteq N \trianglelefteq G$ csoportokra, amelyekre $M \ntrianglelefteq G$ (azaz $\trianglelefteq$ nem tranzitív).

• 9. Legyen G a két elemű test ($\mathbb{Z}_2$) feletti invertálható 3×3-as felső háromszögmátrixok csoportja. Melyikkel lehet G izomorf Q és D_4 közül? (Elegendő, ha valamelyikre megmutatjuk, hogy nem izomorf vele G.)

• 10. Legyen p prímszám és
$$\mathbb{Z}_{p^\infty} = \left\{ \frac{q}{p^n} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z} \right\} \Big/ \mathbb{Z}$$
faktorcsoport *kváziciklikus csoport* (az összeadásra nézve).
   (a) Lássuk be, hogy a definíció értelmes (amit faktorizálunk csoport a $+$-ra, benne $\mathbb{Z}$ normálosztó).
   (b) Adjuk meg tetszőleges m pozitív egészre a $\mathbb{Z}^+_{p^m}$ csoport egy φ beágyazását $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-be.
   (c) Mutassuk meg, hogy az előbbi φ-re
$$\mathbb{Z}_{p^\infty} \big/ \varphi\left(\mathbb{Z}_{p^m}\right) \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$$
   (d) (+10 pontért) Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ minden valódi részcsoportja véges. Mutassuk meg, hogy emiatt $\mathbb{Z}_{p^m}$ nem lehet $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ homomorf képe.