

Algebra 1. 2009/2010 tavasz
6. gyakorlat: Permutációk, permutációcsoportok

1. Adjuk meg a következő permutációk diszjunkt-ciklus felbontását!

(a) $(12345)^{-1}(123)(45)(12345)$

(b) $(123)(124)(125) \dots (12n)$

• 2. Bizonyítsuk be, hogy

(a) Ha bármely i elemet a σ és τ permutációk közül legfeljebb az egyik mozgatja, akkor σ és τ felcserélhetőek.

(b) Ha σ diszjunkt-ciklus felbontásában m_1, m_2, \dots, m_r hosszú ciklusok szerepelnek, akkor σ rendje m_1, m_2, \dots, m_r legkisebb közös többszöröse.

Ennek segítségével határozzuk meg, hogy hányadrendű elemek vannak S_4 -ben és S_5 -ben.

Legyen σ előjele $\text{sg}(\sigma)$, amely 1, ha σ páros, -1 , ha páratlan permutáció. Teljesül $\text{sg}(\sigma\tau) = \text{sg}(\sigma)\text{sg}(\tau)$.

3. Mutassuk meg, hogy egy permutáció pontosan akkor páros, ha valamely ciklusfelbontásában páros sok páros hosszúságú ciklus van. A következő állítások igazolása segít.

(a) Az $(a_1 a_2 \dots a_m)$ ciklust alkalmas elemmel konjugálva megkapjuk az $(12 \dots m)$ ciklust.

(b) Egy ciklus pontosan akkor páros permutáció, ha hossza páratlan.

4. Milyen rendű elemek vannak A_5 -ben? Mutassuk meg, hogy A_4 -nek nincs hat elemű részcsoportja.

• 5. Igazoljuk, hogy $D_3 \cong S_3$.

Ha $G \leq S_n$ egy permutációcsoport, akkor $G(i) := \{\sigma(i) : \sigma \in G\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ az i pont orbit-ja. Azon G -beli elemek G_i részcsoportja, amik i -t fixen hagyják az i stabilizátora (tehát $G_i = \{\sigma \in G : \sigma(i) = i\}$).

6. Mutassuk meg, hogy $|G(i)| = |G : G_i|$.

7. Hány elemű azon csoport, amely a kockát önmagába képező egybevágósági transzformációkból áll?

8. Igazoljuk, hogy a szabályos tetraédert önmagába képező egybevágósági transzformációk csoportja izomorf S_4 -gyel.