Algebra 1. 2009/2010 tavasz
7. gyakorlat: Csoportok direkt szorzata

1. Legyen $g_1, g_2 \in G$, amelyekre $g_1 g_2 = g_2 g_1$ és rendjük relatív prím. Igazoljuk, hogy $\langle g_1, g_2 \rangle \cong \langle g_1 \rangle \times \langle g_2 \rangle$.

2. Bizonyítsuk be, hogy a 3 elemű test feletti 2×2-es invertálható felső háromszögmátrixok multiplikatív csoportjában van hat elemű részcsoport.

• 3. Igazoljuk, hogy ha C_k a k elemű ciklikus csoport, akkor $C_m \times C_n$ pontosan akkor ciklikus, ha $(m, n) = 1$.

4. Legyen G_1 és G_2 csoport, $G = G_1 \times G_2$, $G'_1 = G_1 \times \{e_{G_2}\}$, $G'_2 = \{e_{G_1}\} \times G_2$.

   (a) Bizonyítsuk be, hogy $G'_1 \trianglelefteq G$, $G'_2 \trianglelefteq G$ és $G'_1 \cap G'_2 = \{e\}$

   (b) Igazoljuk, hogy $G/G'_1 \cong G_2$ és $G/G'_2 \cong G_1$.

• 5. Legyen $N, M \trianglelefteq G$, $N \cap M = \{e\}$, és $G/N \cong M$. Igazoljuk, hogy ekkor $G \cong N \times M$ és $G/M \cong N$.

6. A $G = G_1 \times G_2$ direkt szorzat egy $H \leq G$ részcsoportjára legyen

$$H_1 = \{g_1 \in G_1 \,:\, \exists g_2 \in G_2 \, (g_1, g_2) \in H\} \text{ és}$$

$$H_2 = \{g_2 \in G_2 \,:\, \exists g_1 \in G_1 \, (g_1, g_2) \in H\}.$$

   Lássuk be, hogy $H_i \leq G_i$ és $H \leq H_1 \times H_2 \leq G$.

7. (a) Mutassuk meg, hogy amennyiben G_1 és G_2 rendje relatív prím, $H \leq G = G_1 \times G_2$, akkor valamely $K_1 \leq G_1$ és $K_2 \leq G_2$ csoportokra $H = K_1 \times K_2$.

   (b) Adjuk meg $C_4 \times C_6$ és $C_2 \times C_\infty$ csoportok egy-egy részcsoportját, amelyek nem állnak elő a komponensek részcsoportjainak direkt szorzataként.

8. Legyen φ a $G_1 \times G_2$ csoport egy homomorfizmusa és φ_{G_1} az a leképezés, amely $g_1 \in G_1$-hez $\varphi((g_1, e_{G_2}))$ elemet rendeli. Értelmezzük φ_{G_2} homomorfizmust analóg módon. Mutassuk meg, hogy amennyiben G_1 és G_2 rendje relatív prím, akkor $\varphi(G_1 \times G_2) \cong \varphi_{G_1}(G_1) \times \varphi_{G_2}(G_2)$.