Algebra 1. 2009/2010 tavasz
10. gyakorlat: Gyűrűkkel kapcsolatos alapfogalmak

1. Igazoljuk, hogy egy gyűrű pontosan akkor bal-egyszerűsítéses ($ab = ac \Rightarrow a = 0$ vagy $b = c$), ha nincs benne baloldali nullosztó ($a \neq 0$ baloldali nullosztó, ha van olyan $b \neq 0$, amire $ab = 0$).

2. Mutassuk meg, hogy tetszőleges m egészre $m\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$ és $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m$, ahol $\mathbb{Z}_m$ a modulo m maradékosztályok gyűrűje.

• 3. Legyen $H \neq \emptyset$ az R gyűrű egy nemüres részhalmaza. Lássuk be, hogy a H által generált jobbideál

$$\langle H \rangle_{\text{jobb}} = \left\{ \sum_i (n_i h_i + h_i r_i) \mid n_i \in \mathbb{Z}, h_i \in H, r_i \in R \right\}.$$

Írjuk fel hasonló módon a H által generált ideál elemeit is.
Fontos speciális eset: ha $1 \in R$ (R egységelemes), akkor a $h \in R$ által generált jobbideál hR. Ha R ráadásul kommutatív is, akkor ezek szerint $a \in \langle h \rangle$ pontosan akkor, ha a osztható h-val.

4. Egy gyűrű egyszerű, ha nincs valódi ideálja. Mutassuk meg, hogy egy kommutatív gyűrű pontosan akkor egyszerű, ha test, vagy prím rendű zérógyűrű.
(Útmutatás: Ha R egyszerű és nem zérógyűrű, akkor mutassuk meg, hogy R nullosztómentes.)

5. Mondjuk ki, és bizonyítsuk be a gyűrűkre vonatkozó homomorfia és izomorfizmus tételeket.

6. Tegyük fel, hogy R kommutatív gyűrű, $R^2 = R$. Bizonyítsuk be, hogy $I \trianglelefteq R$ ideál pontosan akkor maximális, ha R/I test.

7. (*Kínai maradéktétel*) Legyen $m_1, m_2, \ldots, m_r$ páronként relatív prímek és $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_r$. Igazoljuk, hogy
$$\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_r}.$$

8. Legyen K test és jelölje $K[x, y]$ a K-együtthatós két változós polinomok halmazát. $K[x, y]$ nullosztómentes, egységelemes kommutatív gyűrű a polinomok szokásos összeadására és szorzására nézve. Adjuk meg $K[x, y]$ azon I ideáljának elemeit, amelyet x^2 és y generál. Adjuk meg a $K[x, y]/I$ faktorgyűrű elemeinek egy reprezentáns rendszerét és ennek segítségével határozzuk meg a faktorgyűrű összes ideálját.

9. (*Kínai maradéktétel polinomokra*) Legyen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x) \in K[x]$ páronként relatív prím polinomok, $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \cdots \cdot f_r(x)$, $I_j = \langle f_j(x) \rangle$ az f_j által generált ideál, $I = \langle f(x) \rangle$. Igazoljuk, hogy
$$K[x]/I \cong K[x]/I_1 \times K[x]/I_2 \times \cdots \times K[x]/I_r.$$

Jelölje $K[[x]]$ a K együtthatós formális hatványsorok gyűrűjét, azaz $K[[x]]$ tetszőleges $\mathbf{k}$ eleme

$$\mathbf{k} = \sum_{i=0}^{\infty} k_i x^i$$

alakú, ahol $k_i \in K$. Az összeadás tagonként történik:

$$\mathbf{k} + \mathbf{k}' = \sum_{i=0}^{\infty} (k_i + k_i')x^i,$$

a szorzás hatványsorok formális szorzása: $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'$-ben x^n együtthatója $k_0 k_n' + k_1 k_{n-1}' + \cdots + k_n k_0'$. $K[[x]]$ nullosztómentes, egységelemes kommutatív gyűrű.

10. Igazoljuk, hogy $1 - x$ invertálható $K[[x]]$-ben, de x nem.

11. Mit mondhatunk azon R gyűrűről, amelyre igaz, hogy tetszőleges $r \in R$ esetén a $\{0, r\}$ halmaz ideálja?