Algebra 1., első ZH

2010 március 31.

1. Adjuk meg az összes páronként nem izomorf három elemű egyszerűsítéses félcsoportot.

2. Legyen G csoport és definiáljuk ezen a ρ relációt úgy, hogy

$$a\rho b \iff \text{létezik } g \in G, \text{ amelyre } ag = gb.$$

   (a) Igazoljuk, hogy ρ ekvivalenciareláció.

   (b) Adjunk példát $G = S_3$ esetén, amely mutatja, hogy ρ nem kongruenciareláció.

3. Mutassuk meg, hogy egy k elemű ciklikus csoport pontosan akkor ágyazható be egy n elemű ciklikus csoportba, ha $k \mid n$.

4. Legyen G csoport, H egy részcsoportja. Bizonyítsuk be, hogy

   (a) ha van olyan $g \in G$, amelyre $g \notin H$, akkor $|H| \leq \frac{|G|}{2}$;

   (b) ha van olyan $g_1, g_2 \in G$, amelyre $g_1 \notin H$, $g_2 \notin H$, továbbá $g_1^{-1} \cdot g_2 \notin H$, akkor $|H| \leq \frac{|G|}{3}$.

5. Normálosztó-e a D_{10} csoportban a t és f^8 elemek által generált részcsoport?
(Emlékeztetőül: D_{10} a tizedfokú diédercsoport, tehát

$$D_{10} = \{e, f, f^2, \ldots, f^9, t, tf, tf^2, \ldots, tf^9\}$$

és $f^{10} = e$, $t^2 = e$, $ft = tf^9$.)

+1. Mutassuk meg, hogy egy k elemű ciklikus csoport pontosan akkor egy n elemű ciklikus csoport homomorf képe, ha $k \mid n$.

Munkaidő 90 perc. A feladatok nem feltétlenül nehézségi sorrendben vannak.
Minden feladat hibátlan megoldása 10 pontot ér, 50 pont számít 100%-nak.
Figyeljetek a válaszok precíz indoklására!