# Algebra 2. 2005/2006 ősz
# 2. gyakorlat: Maximális ideálok, prímideálok, primér ideálok

1. Legyen $R$ egységelemes kommutatív gyűrű és $I, J \lhd R$ relatív prím ideálok (azaz $I + J = R$). Igazoljuk, hogy $IJ = I \cap J$. Mutassuk meg, hogy amennyiben $I_j \lhd R$ páronként relatív prím ideálok, akkor $\prod_{j=1}^{k} I_j = \bigcap_{j=1}^{k} I_j$.

• 2. (*Kínai maradéktétel*) Tegyük fel, hogy $R$ kommutatív egységelemes gyűrűben $I_j \lhd R$ $(j = 1, \ldots, k)$ páronként relatív prím ideálok. Igazoljuk, hogy

$$\bigoplus_{j=1}^{k} R/I_j \cong R\Big/\prod_{j=1}^{k} I_j.$$

Miért általánosítása ez a számelméletből tanult kínai maradéktételnek?

3. Lássuk be, hogy amennyiben $R$ kommutatív gyűrű valamely $I$ ideáljára $I$ és $R/I$ Noether-gyűrű, akkor $R$ is Noether-gyűrű.

$R$ mostantól egységelemes kommutatív gyűrű, $K$ test.

$M \trianglelefteq R$ *maximális ideál*, ha $M \neq R$ és $M \subseteq I \trianglelefteq R \Rightarrow I = M$. (Ekvivalens: $R/M$ test.)

$P \trianglelefteq R$ *prímideál*, ha $P \neq R$ és $ab \in P \Rightarrow a \in P$ vagy $b \in P$. (Ekvivalens: $R/P$ nullosztómentes.)

$Q \trianglelefteq R$ *primér ideál*, ha $ab \in Q \Rightarrow a \in Q$ vagy valamely $n$-re $b^n \in Q$. (Ekvivalens: $R/Q$ minden nullosztója nilpotens.)

$I \trianglelefteq R$ ideál *radikálja* $\sqrt{I} = \{r \in R : \exists n \geq 1 \text{ amelyre } r^n \in I\}$.

4. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}[x]$-ben $(x)$ prímideál, de nem maximális ideál.

5. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy két prímideál metszete mikor prímideál.

• 6. Tegyük fel, hogy $R$ kommutatív egységelemes gyűrű, $M$ maximális ideál $R$-ben és $M$ minden eleme nilpotens. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $R$ minden $M$-en kívüli elemének van inverze.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $Q$ primér, akkor $\sqrt{Q}$ prímideál. A megfordítás általában nem igaz, viszont ha $\sqrt{Q}$ maximális ideál, akkor $Q$ primér. (Az utóbbihoz használjuk az előző feladat eredményét.)

• 8. Igazoljuk, hogy $K[x]$ nemnulla prímideáljai és egyben maximális ideáljai az irreducíbilis polinomok által generált ideálok, továbbá $K[x]$ nemnulla primér ideáljai ezek hatványai, azaz $(f^n(x))$ alakúak, ahol $f(x)$ irreducíbilis polinom és $n \geq 1$.

9. (a) Bizonyítsuk be, hogy maximális ideál hatványa mindig primér.
   (b) Prímideál hatványa viszont nem feltétlenül primér, ezt a következő példa mutatja. Legyen $R = K[x, y, z]/(xy - z^2)$ és $P = (\overline{x}, \overline{z}) \trianglelefteq R$. Mutassuk meg, hogy $P$ prímideál, de $P^2$ nem primér.

10. Nem minden primér ideál prímideál hatványa, például legyen $R = K[x, y]$ és $Q = (x, y^2)$. Lássuk be, hogy ez valóban ellenpélda.

11. A primér felbontás általában nem egyértelmű. Legyen $R = K[x, y]$, és $I = (x^2, xy)$. Igazoljuk, hogy $I = (x) \cap (x^2, y) = (x) \cap (x, y)^2$, és mindkettő $I$-nek minimális primér felbontása.

• 12. Igazoljuk, hogy Dedekind-gyűrűben $A, B, C$ nemnulla ideálokra $AC \subseteq BC \iff A \subseteq B \iff$ $\exists D$ ideál, amelyre $A = BD$.