Algebra 2. 2005/2006 ősz
5. gyakorlat: Féligegyszerű gyűrűk, Wedderburn–Artin-tétel

1. Álljon az F_n gyűrű egy R gyűrű elemeiből képezett szigorúan felső háromszög mátrixokból (azaz a főátlóban és alatta csak 0 lehet). Lássuk be, hogy F_n nilpotens gyűrű, és az
$$F = \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n$$
gyűrű minden eleme nilpotens, de F maga nem nilpotens.
($\oplus$ direkt összeg, azaz F elemei mátrixokból álló olyan végtelen sorozatok, amelyek majdnem minden koordinátájában a 0 mátrix szerepel.)

2. Adjunk példát bal oldali Artin-gyűrűre, amely nem féligegyszerű.

3. Igazoljuk, hogy R egységelemes gyűrűben a következők teljesülnek.
   (a) Ha $e \in R$ idempotens, akkor $R = Re \oplus R(1-e)$ balideálok direkt összege.
   (b) Ha $R = A \oplus B$ balideálok direkt összege, akkor van olyan $e \in R$ idempotens, amelyre $A = Re$ és $B = R(1-e)$.
   (c) Ha $e \in Z(R)$ idempotens, akkor $R = Re \oplus R(1-e)$ ideálok direkt összege.
   (d) Ha $R = A \oplus B$ ideálok direkt összege, akkor van olyan $e \in Z(R)$ idempotens, amelyre $A = Re$ és $B = R(1-e)$.

   Itt $Z(R) = \{z \in R : rz = zr \ (\forall r \in R)\}$ az R gyűrű *centruma*.

4. Mikor lesz az $R = \mathbb{Z}/(n)$ gyűrű féligegyszerű és mikor egyszerű? Amennyiben féligegyszerű, adjuk meg R felbontását egyszerű gyűrűk direkt összegére.

- 5. Válaszoljuk meg az előző feladat kérdéseit $\mathbb{Z}$ helyett $K[x]$-re, ahol K test, tehát $R = K[x]/(f)$, valamely $f \in K[x]$ polinomra. (Segítség: R Artin, ha $f \neq 0$. Ennek igazolásához azt lássuk be, hogy R egy K feletti véges dimenziós vektortér.)

6. Bizonyítsuk be, hogy ha R bal oldali Artin-gyűrű, akkor
   (a) ha R-nek nincs 0-tól különböző nilpotens eleme, akkor ferdetestek direkt összege;
   (b) ha R nullosztómentes, akkor ferdetest. (Ezzel új bizonyítást adtunk az 1.4. feladatra.)

   Megjegyzés: ha R tetszőleges véges gyűrű, akkor az (a) és (b) állítások igazak maradnak úgy is, ha a ferdetest szót testre cseréljük, mivel Wedderburn tétele szerint minden véges ferdetest test.

- 7. Mutassuk meg, hogy kommutatív Artin-gyűrűben minden prímideál maximális.

- 8. Határozzuk meg a kommutatív féligegyszerű gyűrűket.

- 9. Legyen R kommutatív gyűrű és I az R egy ideálja. Mutassuk meg, hogy R/I baloldali R-modulus az $r \cdot [a]_I := [ra]_I$ szorzással (ahol $[a]_I$ az $a \in R$ elem I szerinti mellékosztályát jelöli). Speciálisan $I = 0$-ra R modulus R felett. Igazoljuk, hogy R részmodulusai éppen R ideáljai.