Algebra 2. 2005/2006 ősz
7. gyakorlat: Projektív és injektív modulusok

1. Mutassuk meg, hogy
   (a) projektív modulus direkt összeadandója projektív;
   (b) injektív modulus direkt összeadandója injektív.

2. Igaz-e, hogy projektív modulus homomorf képe projektív, injektívé injektív?

3. Legyen $\{M_i : i \in \Lambda\}$ modulusok egy családja. Lássuk be, hogy
   (a) minden M_i projektív $\iff \bigoplus_{i\in\Lambda} M_i$ projektív;
   (b) minden M_i injektív $\Rightarrow \prod_{i\in\Lambda} M_i$ injektív.

   (Bass tétele: R kommutatív gyűrű Noether $\iff$ injektív R-modulusok direkt összege injektív.)

• 4. Legyen $\alpha : A \to B$ injektív modulus-homomorfizmus. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{Im}(\alpha)$ pontosan akkor direkt összeadandója B-nek, ha van olyan $\beta : B \to A$ modulus-homomorfizmus, amelyre $\beta\alpha = id_A$. Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be az állítás duálisát.

(*) 5. *Baer-lemma*
Legyen R kommutatív gyűrű, Q pedig R-modulus. Q injektív $\iff$ minden $I \trianglelefteq R$ ideálra és $\beta : I \to Q$ R-homomorfizmusra van olyan $\gamma : R \to Q$ R-homomorfizmus, amely β kiterjesztése.

Egy Ábel-csoport *torziómentes*, ha a nullelem kivételével minden elemének rendje végtelen és *torzió csoport*, ha minden elemének rendje véges.

Egy *Ábel-csoport osztható*, ha minden $a \in A$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén van olyan $b \in A$, hogy $nb = a$.

6. A Baer-lemma felhasználásával igazoljuk, hogy egy A $\mathbb{Z}$-modulus pontosan akkor injektív, ha A osztható Ábel-csoport.

• 7. Igazoljuk, hogy a $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ modulusok ($\mathbb{Z}$-modulusok) injektívek. Mit mondhatunk az „osztás” egyértelműségéről?

• 8. Bizonyítsuk be, hogy egy nemnulla $\mathbb{Z}$-modulus nem lehet egyszerre projektív és injektív, tehát $\mathbb{Q}$ olyan torziómentes $\mathbb{Z}$-modulus, amely nem projektív.

9. *Végesen generált Ábel-csoportok alaptétele*
Bizonyítsuk be, ha A végesen generált Ábel-csoport, akkor valamely $k, r \in \mathbb{N}$ egészekre és $q_1, \ldots, q_r$ prímhatványokra
$$A \cong \mathbb{Z}^k \bigoplus \left(\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}_{q_i} \right).$$
Útmutatás:
Legyen $T(A)$ az A véges rendű elemeinek halmaza (A *torzió részcsoportja*). Mutassuk meg, hogy $T(A)$ részcsoport és $A/T(A)$ torziómentes. Kihasználva, hogy minden végesen generált torziómentes Ábel-csoport szabad (ld előző feladatsor), igazoljuk, hogy alkalmas k-ra $A \cong \mathbb{Z}^k \oplus T(A)$. Végül alkalmazzuk a véges Ábel-csoportok alaptételét.