Algebra 2. 2005/2006 ősz
11. gyakorlat: Irreducibilis polinomok, normális bővítés

1. (*Gauss-lemma*)
   Egy $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom ***primitív***, ha együtthatóinak legnagyobb közös osztója 1. Bizonyítsuk be, hogy primitív polinomok szorzata primitív polinom.

2. Lássuk be, hogy $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ pontosan akkor irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben, ha irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben.

3. (***Eisenstein-féle irreducibilitási kritérium***)
   Legyen $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ polinom és $p \in \mathbb{Z}$ prím, amelyre p osztja $a_0, \ldots, a_{n-1}$-et, de $p \nmid a_n$ és $p^2 \nmid a_0$. Igazoljuk, hogy $f(x)$ irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben.

4. Legyen R UFD (egyértelmű faktorizációs tartomány) és K a hányadosteste. Általánosítsuk $\mathbb{Z}$-ről és $\mathbb{Q}$-ról R-re és K-ra az utóbbi három feladatot.

• 5. Bizonyítsuk be, hogy $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha p prímszám. (Útmutatás: Mutassuk meg, hogy egy $f(x)$ polinom pontosan akkor irreducibilis, ha $g(x) := f(x+1)$ az. Használjuk az Eisenstein-kritériumot annak igazolására, hogy $(x+1)^{p-1} + (x+1)^{p-2} + \cdots + (x+1) + 1$ irreducibilis.)

6. Mutassuk meg, hogy minden n-re van n-edfokú $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis polinom. Lássuk be, hogy $\mathbb{Q}$ algebrai lezártja nem lehet véges bővítése a racionális számoknak.

7. Legyen $f(x) \in F[x]$ irreducibilis n-edfokú polinom és K az F egy k-adfokú bővítése. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben $(n, k) = 1$, akkor $f(x)$ irreducibilis K felett is.

8. Igazoljuk, hogy $x^5 + 9x^3 + 15x + 6$ irreducibilis $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ felett.

9. Hányadfokú a K/F bővítés, ha K az $f \in F[x]$ polinom felbontási teste és
   (a) $F = \mathbb{Q}$, $f(x) = x^6 - 1$;
   (b) $F = \mathbb{Q}$, $f(x) = x^6 - 2$;
   (c) $F = \mathbb{F}_5$, $f(x) = x^6 - 1$;
   (d) $F = \mathbb{F}_7$, $f(x) = x^6 - 1$?

• 10. Határozzuk meg $x^4 + 1$ felbontási testét $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_2$ és $\mathbb{F}_7$ felett.

11. Bizonyítsuk be, hogy $x^4 - x^2 + 1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. Milyen p prímekre irreducibilis $\mathbb{F}_p$ felett?

12. Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ bővítés nem normális bővítés. Adjuk meg a legkisebb olyan K testet, amire $K/\mathbb{Q}$ normális és $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq K$.

• 13. Lássuk be, hogy minden 2 fokú bővítés normális.

14. Legyenek $K \supseteq L \supseteq F$ testek. Lássuk be, hogy ha K/F normális bővítés, akkor K/L is az, de L/F nem feltétlenül. Mutassunk olyan példát, amelyben K/L és L/F is normális bővítés, de K/F nem az.