Egy F felett algebrai α elem *szeparábilis F felett*, ha $\mathrm{minpol}_{F,a}(x)$ szeparábilis polinom, azaz gyökei egyszeresek. *K/F bővítés szeparábilis*, ha K minden eleme szeparábilis F felett.

$F(\alpha)/F$ algebrai bővítés pontosan akkor szeparábilis, ha α szeparábilis F felett.

Algebra 2. 2005/2006 ősz
12. gyakorlat: Szeparábilis bővítések

1. Legyenek $K \supseteq L \supseteq F$ testek. Lássuk be, hogy ha K/F szeparábilis bővítés, akkor K/L és L/F is az.
   (A megfordítás is igaz, a bizonyítása egy kicsit trükkösebb.)

2. Igazoljuk, hogy ha F egy $p > 0$ karakterisztikájú test, $a \in F \setminus F^p$, akkor $x^p - a$ irreducibilis F felett.

3. Bizonyítsuk be, hogy perfekt test minden algebrai bővítése is perfekt.
   (*F perfekt*, ha F minden algebrai bővítése szeparábilis. Ez azzal ekvivalens, hogy $F^p = F$, ahol $p > 0$ az F karakterisztikája.)

4. Igazoljuk, hogy minden véges test perfekt. Adjuk meg $\mathbb{F}_p(t)$ egy nem szeparábilis bővítését.

• 5. Legyen $F = \mathbb{F}_2(t)$, $K = F(\sqrt[6]{t})$. Mutassuk meg, hogy $K = F(\sqrt{t}, \sqrt[3]{t})$ és $\sqrt[3]{t}$ szeparábilis F felett, míg $\sqrt{t}$ nem az. (Utóbbi ráadásul teljesen inszeparábilis, ez következik a 8. feladatból.)

6. Legyen $f(x) \in F[x]$ irreducibilis. Mutassuk meg, hogy f minden gyökének ugyananannyi a multiplicitása.

Egy F felett algebrai α elem *teljesen inszeparábilis*, ha minimálpolinomjának ő az egyetlen gyöke. Egy K/F bővítés teljesen inszeparábilis, ha K minden eleme teljesen inszeparábilis F felett.

• 7. Tegyük fel, hogy F egy $p > 0$ karakterisztikájú test és $f(x) \in F[x]$ irreducibilis polinom. Igazoljuk, hogy létezik $g(x) \in F[x]$ irreducibilis és szeparábilis polinom, és van $m \geq 0$ egész, amelyre $f(x) = g\left(x^{p^m}\right)$.

• 8. Legyen F egy $p > 0$ karakterisztikájú test és α algebrai elem F felett. Lássuk be, hogy α pontosan akkor teljesen inszeparábilis F felett, ha valamely $m \geq 0$ egészre $\alpha^{p^m} \in F$.

∗ 9. Legyen $K = \mathbb{F}_p(t, u)$ két változós racionális függvénytest és $F = \mathbb{F}_p(t^p, u^p)$. Mutasssuk meg, hogy ezen bővítés foka p^2, K/F teljesen inszeparábilis, továbbá nem egyszerű bővítés.