Algebra 2., első pótZH megoldások

2005 november 30.

1. Legyenek R_1 és R_2 egységelemes gyűrűk, L balideál $R_1 \times R_2$-ben. Bizonyítsuk be, hogy létezik L_1 balideál R_1-ben és L_2 balideál R_2-ben, amelyekre $L = L_1 \times L_2$.

   Megoldás:

   Legyen
   $$L_1 = \{r_1 \in R_1 \;:\; \exists\, b \in R_2 \text{ hogy } (r_1, b) \in L\},$$
   és hasonlóan
   $$L_2 = \{r_2 \in R_2 \;:\; \exists\, a \in R_1 \text{ hogy } (a, r_2) \in L\}.$$
   A definíció szerint $L \subseteq L_1 \times L_2$. A másik irányú tartalmazás igazolásához legyen $(r_1, r_2) \in L_1 \times L_2$. Ekkor – L_1 definíciója alapján – van olyan $b \in R_2$, hogy $(r_1, b) \in L$. Miután $(1, 0) \in R_1 \times R_2$ és L balideál, így $(r_1, 0) = (1, 0) \cdot (r_1, b) \in L$. Hasonlóan $(0, r_2) \in L$, ezért $(r_1, r_2) = (r_1, 0) + (0, r_2) \in L$.

2. Tegyük fel, hogy R főideálgyűrű $p \in R$ elemére teljesül a következő tulajdonság:
   $$\forall\, a \in R \text{ esetén } p \mid a \text{ vagy } (p, a) = R \text{ (a } p \text{ és } a \text{ által generált ideál } R).$$
   Igazoljuk, hogy p irreducibilis vagy egység R-ben.

   Megoldás:

   Annyit kell megmutatni, hogy amennyiben $p = a \cdot b$, akkor a és b valamelyike biztosan egység, tegyük tehát fel, hogy $p = a \cdot b$. Ebből következik, hogy $a \mid p$, tehát ha $p \mid a$ is igaz, akkor a és p asszociáltak, azaz b egység. Ha $p \nmid a$, akkor viszont a feltétel szerint $R = (p, a) = (ab, a) = (a)$, azaz a egység.

3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges K test és n pozitív egész esetén az $R = K[x]/(x^n)$ gyűrű egyetlen prímideálja $(x)/(x^n)$.

   Megoldás:

   Legyen $J \trianglelefteq K[x]/(x^n)$ prímideál, ekkor van olyan $I \trianglelefteq K[x]$, $I \supseteq (x^n)$, amelyre $J = I/(x^n)$. A faktor, azaz $(K[x]/(x^n))\big/(I/(x^n)) \cong K[x]/I$ nullosztómentes, ami egyben azt is jelenti, hogy I prímideál $K[x]$-ben. Csakhogy I tartalmazza x^n elemet, így ha $x \notin I$ volna, akkor x osztálya nemnulla nilpotens elem (és így valódi nullosztó) lenne $K[x]/I$-ben. Tehát $I \supseteq (x)$, és miután (x) maximális ideál $K[x]$-ben, így $I = (x)$, amint állítottuk.

4. Legyen R Dedekind-gyűrű, $I \trianglelefteq R$ ideál, $I \neq 0$, $I \neq R$. Mutassuk meg, hogy R/I gyűrű pontosan akkor féligegyszerű, ha I különböző prímideálok szorzata.

   1. megoldás:
   Ha $L \trianglelefteq R/I$ (bal)ideál, akkor van olyan $J \trianglelefteq R$, $I \subseteq J$, amelyre $L = J/I$. Ilyen J azonban csak véges sok lehet, hiszen $I \subseteq J$ miatt J-ben minden prímideál kisebb vagy egyenlő hatványon szerepel, mint I-ben. Tehát R/I-nek mindenképpen csak véges sok ideálja van, ezért Artin-gyűrű.

Legyen először $I = \prod_{i=1}^{k} P_i$ különböző prímideálok szorzata. Ha $L = J/I \trianglelefteq R/I$ nilpotens (bal)ideál, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $L^n = 0$. Az előző bekezdés szerint az is igaz, hogy $J = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\beta_i}$ valamely $\beta_i \in \{0,1\}$ számokra. Ekkor

$$0 = L^n = (J/I)^n = J^n/I = \left(\prod_{i=1}^{k} P_i^{n \cdot \beta_i} \right) \Big/ I,$$

ezért $\prod_{i=1}^{k} P_i^{n\cdot\beta_i} \supseteq I = \prod_{i=1}^{k} P_i$, tehát $n \cdot \beta_i \geq 1$, amiből $\beta_i \geq 1$ következik, tehát minden i-re $\beta_i = 1$ és így $I = J$, azaz $L = J/I = 0$. Megmutattuk, hogy R/I Artin és nincs benne nullától különböző nilpotens (bal)ideál, tehát R/I féligegyszerű.

Ha I nem különböző ideálok szorzata, hanem $I = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\alpha_i}$ és például $\alpha_1 > 1$, akkor $\left(P_1 \prod_{i=2}^{k} P_i^{\alpha_i} \right) / I$ nemnulla nilpotens (bal)ideálja R/I-nek (hiszen α_1 hatványra emelve 0). Ebben az esetben tehát R/I nem féligegyszerű.

2. megoldás:
Ha $I = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\alpha_i}$, akkor a kínai maradéktétel szerint

$$R/I = R \Big/ \left(\prod_{i=1}^{k} P_i^{\alpha_i} \right) \cong \bigoplus_{i=1}^{k} R \big/ P_i^{\alpha_i}.$$

Ha $\alpha_i = 1$, akkor $R \big/ P_i^{\alpha_i}$ test (Dedekind-gyűrűben a prímideálok egyben maximálisak), tehát ha I különböző prímideálok szorzata, akkor R/I testek direkt összege, így féligegyszerű. Ha valamely i-re $\alpha_i > 1$, akkor viszont R/I-ben $P_i/P_i^{\alpha_i}$ nemnulla nilpotens ideál, tehát R/I nem féligegyszerű.

5. Álljon R gyűrű az összes 2×2-es egész elemű felső háromszög mátrixokból (az összeadás és szorzás a mátrixok szokásos műveletei).

   (a) Keressük meg R összes primitív idempotens elemét. ($e \in R$ primitív idempotens, ha idempotens és nem bontható valódi módon egymásra merőleges idempotensek összegére, tehát $e = e_1 + e_2$, $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$ és $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ esetén $e_1 = 0$ vagy $e_2 = 0$.)

   (b) Adjunk meg $e_1, e_2 \in R \setminus \{0\}$ elemeket, amelyekre $R = Re_1 \oplus Re_2$.

Megoldás:

Ha $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, akkor $A^2 = A$ azt adja, hogy $a^2 = a$, $b^2 = b$ és $(a+b-1)c = 0$, amiből $a, b \in \{0,1\}$ és $c = 0$ vagy $\{a,b\} = \{0,1\}$. Könnyű ellenőrizni, hogy az egységelem (identitás mátrix) kivételével ezek mind pritmitív idempotensek.

Tanultuk gyakorlaton, hogy amennyiben $e \in R$ idempotens, akkor $R = Re \oplus R(1-e)$, tehát például

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

megfelelő választás.

6. Legyen R egységelemes gyűrű, M pedig ciklikus (egy elemmel generálható) baloldali R-modulus. Mutassuk meg, hogy van olyan L balideál R-ben, hogy M izomorf az R/L baloldali R-modulussal.

   1. megoldás:
   Gyakorlaton igazoltuk, hogy egy k elemmel generálható modulus homomorf képe a k rangú szabad modulusnak. Speciálisan egy ciklikus modulus homomorf képe R-nek. A modulusokra vonatkozó homomorfia tétel szerint ha $\varphi\colon R \to M$ szürjektív, akkor $R/\operatorname{Ker}\varphi \cong M$. Végül $\operatorname{Ker}\varphi$ részmodulusa R-nek, így egyben balideálja is, tehát $L = \operatorname{Ker}\varphi$ megfelelő választás.

   2. megoldás:
   Legyen M generátora m, ekkor $M = Rm$ és legyen $L = \operatorname{Ann}(m) = \{r \in R : rm = 0\}$. Nyilván L balideál, továbbá $R/L \cong M$, ugyanis az $[r]_L \mapsto rm$ leképezés könnyen láthatóan modulus-izomorfizmus.