Algebra 2., első ZH megoldások

2005 november 4.

1. Adjuk meg $\mathbb{Z}[x]$ gyűrű egy
   (a) maximális ideálját;
   (b) prímideálját, amely nem maximális;
   (c) primér ideálját, amely nem prímideál.

   Természetesen igazolni kell, hogy a példák megfelelőek.

   Megoldás:

   (a) $(x, 2)$ ideál maximális, mert $\mathbb{Z}[x]/(x, 2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$, ami test;

   (b) (x) prímideál, mert $\mathbb{Z}[x]/(x) \cong \mathbb{Z}$ nullosztómentes, de nem maximális, mert a faktor nem test;

   (c) $(x, 2)^2$ primér, mert maximális ideál hatványa, de nem prím, mert a faktorban $\overline{x} \neq 0$ nullosztó, hiszen négyzete 0.

2. Legyen $p \in \mathbb{Z}$ prímszám és

$$R = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \ : \ a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } p \nmid b \right\}.$$

   (a) Igazoljuk, hogy R részgyűrűje $\mathbb{Q}$-nak és határozzuk meg R egységeit (1 osztóit).

   (b) Bizonyítsuk be, hogy R tetszőleges valódi ideálját valamely n pozitív egészre p^n generálja.

   (c) Lássuk be, hogy R Dedekind-gyűrű.

   Megoldás:

   (a) Zárt a kivonásra és a szorzásra: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$, illetve $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, amik R-ben vannak, hiszen ha p nem osztja b, d egészeket, akkor szorzatukat sem.
   R egységei $U(R) = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \ : \ p \nmid a, b \right\}$. Ha $p \nmid a, b$, akkor $\frac{a}{b}$-nek R-beli inverze $\frac{b}{a}$, így $\frac{a}{b}$ egység. Megfordítva: legyen $\frac{a}{b}$ egység és tegyük fel, hogy a és b relatív prímek. Ekkor $\frac{a}{b}$ invertálható R-ben, így valamely c és d relatív prím egészekre $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = 1$, ahol $p \nmid d$. A relatív prímségi feltételek miatt ebből következik, hogy $a = d$, tehát $p \nmid a$.

   (b) Ha $\frac{a}{b} \in I \setminus \{0\}$ és $a = p^m a'$, ahol $p \nmid a'$, akkor $\frac{b}{a'} \in R$, ezért $p^m = \frac{b}{a'} \cdot \frac{a}{b} \in I$. Legyen n minimális, amelyre $p^n \in I$. Ekkor $I = (p^n)$, hiszen ha $\frac{a}{b} \in I$, és p-nek p^n-nél kisebb p^m hatványa osztaná csak a-t, akkor az előbbiek szerint $p^m \in I$ lenne, ellentmondásban n minimalitásával.

   (c) R főideálgyűrű, így Dedekind. Közvetlenül is látható ez: épp most igazoltuk, hogy minden ideál $(p)^n$ alakú, így (p) maximális ideál és minden ideál maximális ideálok szorzata.

3. Mutassuk meg, hogy ha egy R Dedekind-gyűrűben minden irreducíbilis elem prím (tehát R UFD: R minden eleme egyértelműen áll elő irreducíbilisek szorzataként), akkor R főideálgyűrű.

   Megoldás:
   Ha megmutatjuk, hogy minden prímideál főideál, például $P_i = (p_i)$, akkor egy tetszőleges ideál $I = \prod_{i=1}^k P_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^k (p_i)^{\alpha_i} = (\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i})$ is az.

   Legyen tehát P prímideál, $r \in P$ tetszőleges, továbbá $r = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ az r irreducíbilis felbontása. Miután P prím, így a szorzat valamelyik tényezője is P-ben van, legyen mondjuk ez a p irreducíbilis elem. Ekkor p prím is, így (p) prímideál. De $(p) \subseteq P$, azaz (p) felbontásában szerepel P. Ez csak úgy lehet, ha $(p) = P$, ezért P főideál.

4. Legyen R egységelemes gyűrű, L nilpotens balideálja, M pedig egyszerű R-modulus (tehát nincs valódi részmodulusa). Mutassuk meg, hogy minden $\ell \in L$ és $m \in M$ esetén $\ell m = 0$.

   Megoldás:
   Azt kell megmutatni, hogy $LM = 0$. Tudjuk, hogy $LM \leq M$, tehát M egyszerűsége miatt $LM = 0$, vagy $LM = M$. Utóbbi csak akkor lehet, ha $M = 0$, mert ha $LM = M$ és $L^n = 0$, akkor $0 = 0 \cdot M = L^n M = L^{n-1}(LM) = L^{n-1}M = \cdots = LM = M$.

5. Tegyük fel, hogy R egységelemes gyűrű, $e \in R$ idempotens és Re minimális balideál R-ben. Bizonyítsuk be, hogy e primitív idempotens (azaz e nem bontható valódi módon egymásra merőleges idempotensek összegére, tehát $e = e_1 + e_2$, $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$ és $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ esetén $e_1 = 0$ vagy $e_2 = 0$).

   Megoldás:
   Legyen $e = e_1 + e_2$, a feltételeknek megfelelő. Ekkor Re_1 balideál R-ben és $Re_1 \leq Re$, ugyanis $re_1 = re_1 e \in Re$, miután $re_1 e = re_1(e_1 + e_2) = re_1^2 + re_1 e_2 = re_1 + 0 = re_1$. Re minimalitása miatt $Re_1 = Re$, vagy $Re_1 = 0$. Előbbi esetben $e \in Re$ előáll re_1 alakban, így $e_2 = ee_2 = re_1 e_2 = 0$. Utóbbi esetben pedig $1 \in R$ miatt $e_1 \in Re_1 = 0$-ból következik $e_1 = 0$.