

# Matematika B1 2002/2003 őszi

## 12. Gyakorlat

1. Ívhossz.

(a) Derékszögű koordináták esetén:  $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$

i. Lánggörbe:  $y(x) = \operatorname{ch} x$ ,  $0 \leq x \leq \ln 2$

ii.  $y(x) = \ln \frac{1}{\sin x}$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$

(b) Polárkoordinátás megadás esetén:  $\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi$

i. Kardioid:  $r(\varphi) = 2a(1 + \cos \varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$

ii.  $r(\varphi) = \exp(-\varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ , és mi a helyzet, ha  $\varphi_1 \rightarrow \infty$ ?

(c) Paraméteres görbére:  $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$

i.  $(x(t), y(t)) = (t \sin t, t \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$

2. Forgástest térfogata ( $x$  tengely körüli forgatás).

(a) Derékszögű koordináták esetén:  $\pi \int_a^b y^2 dx$

i.  $y(x) = x \exp(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$

ii.  $y(x) = \sqrt{1 + x^2}$ ,  $0 \leq x \leq 1$

(b) Paraméteres görbe  $x$  tengely körüli forgatásából:  $\pi \int_{t_0}^{t_1} y^2 \dot{x} dt$

3. Forgástest felszíne ( $x$  tengely körüli forgatás).

(a) Derékszögű koordináták esetén:  $2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$

i.  $2\sqrt{x}$ ,  $1 \leq x \leq 4$ , (vagy  $0 \leq x \leq 4$ , de így improprius)

ii.  $\operatorname{ch} x$ ,  $0 \leq x \leq 4$

(b) Paraméteres:  $2\pi \int_{t_0}^{t_1} y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$

i. Tórusz:  $(x(t), y(t)) = (b \cos t, a + b \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^+$ ,  $a \geq b$

ii.  $(x(t), y(t)) = (\exp(t) \cos t, \exp(t) \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

4. Súlypont:  $T = \int_a^b y dx$ ,  $x_s = \frac{\int_a^b xy dx}{T}$ ,  $y_s = \frac{\int_a^b y^2 dx}{2T}$

(a) Félkör lemez súlypontja?  $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $-R \leq x \leq R$ ,  $R \in \mathbb{R}^+$

(b)  $y(x) = \sqrt{x}$  görbe, az  $x$  tengely és az  $x = 4$  egyenes által határolt lemez súlypontja?