

1. gyakorlat: Kombinatorika, komplex számok bevezetés

1. Hányféle zászló készíthető piros, fehér és zöld színekből, ha egy szín csak egyszer szerepelhet és a zászló színezése három egyenlő szélességű vízszintes sávban történik?
2. Hányféle lehet egy n fős futóverseny első 3 helyezése?
3. Hány k elemű részhalmaza van egy n elemű halmaznak?
4. Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak?
5. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.
6. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.
7. Bizonyítsuk be, hogy
 - (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ és
 - (b) $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

8. Hányféleképp oszthatunk ki n ember között k darab egyforma tárgyat, ha

- (a) mindenki kap legalább egyet;
 - (b) nem feltétlenül kap mindenki?
9. Bizonyítsuk be a polinomiális tételt:

$$(a_1 + \dots + a_k)^n = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ i_1 + \dots + i_k = n}} \frac{n!}{i_1! \dots i_k!} a_1^{i_1} \dots a_k^{i_k}.$$

10. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy $n \geq 1$ egész számra

- (a) $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ és
 - (b) $\sum_{k=1}^n (2k - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$.

11. Mutassuk meg, hogy az alábbi F halmazok a megadott műveletekkel testet alkotnak.

- (a) $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, ahol $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmaza, a műveletek a valós számoknál megszokottak;
 - (b) $F = \{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$, ahol p prímszám és a szorzást és az összeadást úgy értelmezzük, mint az egész számok körében, csak vesszük az eredmény p -vel való osztási maradékát.

12. Adjuk meg az alábbi komplex számok algebrai alakját!

- (a) $(3 - 4i)(7 + 8i)$
 - (b) $\frac{3-4i}{2-i}$
 - (c) i^{1994}
 - (d) $(1 + i)^9$

13. Mi a mértani helye a síkon azoknak a pontoknak, amelyeknek megfelelő z komplex számokra:

- (a) $|z - 5 + i| = 2$
 - (b) $|z - i| = |z + i|$
 - (c) $\left| \frac{z-3+4i}{z-i} \right| \geq 1$
 - (d) $|z| = 3iz$
 - (e) $z + \bar{z} < 4$
- (f) $2z + 5 = 2\bar{z}$