

Lineáris algebra 2004/2005 őszi

2. gyakorlat: Komplex számok

1. Határozzuk meg az $\frac{(1+2001i)^{2001}}{(1-2001i)^{2001}}$ komplex szám abszolút értékét!
2. Számítsuk ki a $16 - 30i$ komplex szám négyzetgyökeit!
3. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:
 - (a) $z^2 + 1 = 0$
 - (b) $z^2 = -12$
 - (c) $z^2 + 3z + 4 = 0$
 - (d) $z^2 = i$
 - (e) $z^2 + 2iz + 1 + i = 0$
4. (a) Mi a geometriai jelentése annak, hogy egy komplex számot megszorozunk $(1 + i)$ -vel?
(b) Mi a geometriai jelentése annak, hogy egy komplex számnak vesszük a reciprokát!
5. Hozzuk trigonometrikus alakra:
 - (a) -8
 - (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
 - (c) $1 - i \operatorname{tg}(\alpha)$
 - (d) $\sin 12^\circ - i \cos 12^\circ$
6. Számítsuk ki
 - (a) a $(-\sqrt{3} + i)^{-9}$ komplex szám értékét és hozzuk az eredményt algebrai alakra!
 - (b) $-243i$ összes ötödik gyökét trigonometrikus alakban!
 - (c) a $z^6 - z^3 + 1 - i = 0$ egyenlet összes megoldását!
 - (d) a $\bar{z} = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$ paraméter) összes megoldását!
7. (a) Tetszőleges n természetes számra számítsuk ki zárt alakban az $(1 + i)^n$ értékét!
(b) Adjuk meg zárt alakban az $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots$ összeg értékét!
• (c) Adjunk képletet $\cos(nx)$ -re $\cos(x)$ és $\sin(x)$ függvényében!
8. Adjuk meg $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényként (a szokásos algebrai műveletek és a konjugálás segítségével) az alábbi síktranszformációkat!
 - (a) origó körüli α szögű forgatás!
 - (b) $1 + i$ körüli 60° -os forgatás!
 - (c) Az x illetve az y tengelyre való tükrözés!
 - (d) Az origón és a $2i + 1$ ponton átmenő tengelyre való tükrözés.
9. Adjuk meg annak a négyzetnek a másik két csúcsát, melynek két átellenes csúcsát két adott komplex szám z_1 és z_2 alkotják!
10. Legyen $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ az n -edik egységgyökök halmaza adott $n \geq 1$ -re. Számítsuk ki:
 - (a) $\sum_{j=1}^n \varepsilon_j$
 - (b) $\prod_{j=1}^n \varepsilon_j$
 - (c) $\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^k$, ahol $k \in \mathbb{N}$
11. Tegyük fel, hogy két egységgyök összege egységnyi hosszúságú!
 - (a) Milyen szöget zárnak be egymással?
 - (b) Mutassuk meg, hogy az összeg is egységgyök!