

Lineáris algebra 2004/2005 ősz

3. gyakorlat: Polinomok

1. Osszuk el maradékosan az $x^5 - 2x^2 + 4$ polinomot
 - (a) $x + 1$ -gyel,
 - (b) $(x + 1)^2$ -nel,
 - (c) $(x^2 - 1)$ -gyel!
2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ egészegyütthatós polinomnak $\frac{p}{q}$ gyöke, ahol $p, q \in \mathbb{Z}$ és $\text{lko}(p, q) = 1$, akkor $p \mid a_0$ és $q \mid a_n$.
- 3. Lássuk be, hogy $(x - \alpha)^k$ pontosan akkor osztója a $p(x)$ polinomnak, ha $p^{(j)}(\alpha) = 0$ minden $j = 0, 1, \dots, k - 1$ -re, ahol $p^{(j)}$ p polinom j . deriváltja.
4. Keressük meg az alábbi polinomok összes gyökét! Bontsuk fel a polinomokat irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{C}[x]$ -ben, $\mathbb{R}[x]$ -ben és $\mathbb{Q}[x]$ -ben!
 - (a) $2x^6 + x^5 - 5x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 3x + 3$
 - (b) $x^5 + 1$
5. Adjuk meg az alábbi polinomok gyöktényezős alakját!
 - (a) $x^3 - 1$
 - (b) $x^2 + x + 1$
 - (c) $x^n - 1$
 - (d) $x^n + 1$
 - (e) $x^{2n} - x^{2n-1} + \dots + x^2 - x + 1$
6. Adjuk meg azt a legalacsonyabb fokú 1 főegyütthatós
 - (a) komplex együtthatós,
 - (b) valós együtthatóspolinomot, amelynek i kétszeres, 1 háromszoros gyöke!
7. Egy ε egységgyök **rendje** n , ha $\varepsilon^n = 1$ és n a legkisebb ilyen pozitív egész szám. Ezt $o(\varepsilon) = n$ -nel jelöljük.
 - (a) Bizonyítsuk be, hogy ha $o(\varepsilon) = n$, akkor $o(\varepsilon^k) = \frac{n}{\text{lko}(n, k)}$.
 - (b) Határozzuk meg a primitív n -edik egységgyökök számát!
 - (c) Mutassuk meg, hogy ha $\text{lko}(k, l) = 1$, akkor egy primitív k -edik és egy primitív l -edik egységgyök szorzata primitív kl -edik egységgyök!
8. Adjuk meg azt a legalacsonyabb fokú $p(x)$ polinomot, amelyre $p(x_k) = y_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$), ahol

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_k & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_k & +10 & -5 & 0 & 5 \end{array}$$

Bontsuk fel a polinomot gyöktényezőik szorzatára! Számítsuk ki a gyökök összegét és szorzatát!

9. Bizonyítsuk be, hogy ha F véges test, akkor minden $f: F \rightarrow F$ függvény megadható polinommal!