

4. gyakorlat: Elemi műveletek mátrixokkal, determináns, lineáris egyenletrendszer

1. Legyenek megadva az alábbi mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 2+i \\ 2 & 3-i \\ 3 & 4i \end{pmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi műveletek közül azokat, amelyek értelmesek: $A + A$, $A + B$, AB , AC , $AC + 2C$, CBC , D^2 , $\overline{DD}^T$.

2. Legyen $n > 1$ és keressünk olyan $n \times n$ -es A, B, C valós mátrixokat, amelyekre:

- (a) van olyan k természetes szám, hogy $A^k = E$, de $A \notin \{E, -E\}$;
- (b) van olyan k természetes szám, hogy $B^k = 0$, de $B \neq 0$;
- (c) $C^2 = C$, de $C \neq 0$ és $C \neq E$.

3. Legyenek A és B tetszőleges $n \times n$ -es mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy az $AB - BA$ mátrix főátlójában az elemek összege 0!

4. Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát és inverzét:

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Lássuk be, hogy egy egész elemű mátrix inverze pontosan akkor egész elemű, ha a mátrix determinánsa $+1$ vagy -1 .

6. Adjuk meg a következő egyenletrendszerek összes megoldását:

$$\begin{array}{lll} \begin{array}{l} x + 2y - z = 2 \\ x - y + 2z = 7 \\ x - z = -2 \\ 2x + y + z = 7 \end{array} & \text{b) } \begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ -x + y - z = 2 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ 4x + 4y + 4z = 1 \end{array} & \bullet \text{ c) } \begin{array}{l} 7x + 14y - 21z = 7 \\ x + 2y - 3z = 1 \\ 5x + 10y + 15z = 5 \\ 3x + 6y - 9z = 3 \end{array} \end{array}$$

7. Az a és b értékétől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek?

$$\begin{array}{rcl} 2x + y + z & = & 4 \\ x + 2y - z & = & -3 \\ x - y + 2z & = & a \\ x + by + z & = & 3 \end{array}$$

8. Legyen adva egy k egyenletből és n ismeretlenből álló racionális együtthatós lineáris egyenletrendszer! Döntsük el, melyek igazak az alábbi következtetések közül:

- (a) Ha $k \leq n$, akkor az egyenletrendszernek van megoldása.
- (b) Ha $k > n$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.
- (c) Ha $k < n$ és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor végtelen sok megoldása is van.
- (d) Ha $k > n$ és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor csak egy megoldása van.
- (e) Ha létezik valós megoldás, akkor létezik (csupa) racionális megoldás is.
- (f) Ha bármely $k - 1$ egyenletet kiválasztva az így kapott egyenletrendszernek van megoldása, akkor az eredetinek is van megoldása.