

Lineáris algebra 2004/2005 ősz

5. gyakorlat: Mátrixegyenletek, determináns számolás

1. (a) Igazoljuk, hogy diagonális mátrixok szorzata diagonális, felső háromszög mátrixoké felső háromszög!
 (b) Mikor invertálható egy diagonális mátrix és mi az inverze?
 (c) Mikor invertálható egy felső háromszög mátrix? Mutassuk meg, hogy ez is felső háromszög mátrix!
2. Legyenek A és B $n \times n$ -es felcserélhető mátrixok (azaz $AB = BA$), és legyen A invertálható is. Bizonyítsuk be, hogy ekkor A^{-1} és B is felcserélhető!
3. Az $n \times n$ -es A és B mátrixokra teljesül, hogy $AB = A$ és $BA = B$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A^2 = A$ és $B^2 = B$!
4. Az $n \times n$ -es A mátrixra teljesül, hogy $A^2 + A + E = 0$. (0 a csupa nulla elemből álló mátrixot jelöli.) Igazoljuk, hogy az A mátrixnak létezik inverze.
5. Az $n \times n$ -es A mátrix minden eleme páros szám, $64 \mid \det A$, de $128 \nmid \det A$. Mekkora lehet n ?
6. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat! A mátrixok $n \times n$ -esek; a nem jelzett elemek értéke 0; a, b, c paraméterek.
 - (a) $A[i, i] = 1$
 - (b) $A[i, i] = c$
 - (c) $A[i, i] = A[i, i + 1] = A[n, 1] = 1, n = 2k$
 - (d) $A[i, j] = i + j - 1$
 - (e) $A[i, j] = (i + j - 1)^2$
 - (f) $A[i, j] = \min\{i, j\}$
 - (g) $A[i, j] = \binom{i+j-1}{i-1}$
 - (h) $A[i, i] = 2, A[i, j] = 1$
 - (i) $A[i, i] = a, A[i, j] = b$
 - (j) $A[i, j] = |i - j|$
 - (k) $A[i, j : i + j \leq n + 1] = A[n, n] = 1$
 - (l) $A[i, i - 1] = A[i, i + 1] = 1, A[i, i] = 2$
 - (m) $A[i, i - 1] = A[i, i + 1] = -1, A[i, i] = 1$
7. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + & x_2 + \dots + & x_n = n \\
 x_1 + & 2x_2 + \dots + & nx_n = n^2 \\
 x_1 + & 4x_2 + \dots + & n^2x_n = n^3 \\
 \dots & & \\
 x_1 + & 2^{n-1}x_2 + \dots + & n^{n-1}x_n = n^n
 \end{array}$$