

Lineáris algebra 2004/2005 ősz  
6. gyakorlat: Lineáris függetlenség, dimenzió, rang

- 1. Mutassuk meg, hogy az alábbiak  $\mathbb{R}$  feletti vektorteret alkotnak és adjunk meg bennük egy bázist!
  - (a)  $n \times n$ -es valós szimmetrikus mátrixok;
  - (b) valós együtthatós legfeljebb  $n$ -edfokú polinomok;
  - (c) valós függvények (tehát  $V = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ függvény}\}$ ).
- 2. Mely  $\mathbb{R}$  feletti vektorterek izomorfak az  $\mathbb{R}^6$ ,  $\mathbb{R}^{3 \times 2}$  és  $\mathbb{C}^3$  lineáris terek közül?
- 3. Igaz-e a következő állítás: Ha  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{100}$  lineárisan összefüggő, akkor  $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{100}$  is lineárisan összefüggő. (Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát!)
- 4. Tegyük fel, hogy  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  lineárisan független, de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}$  is,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}$  is, és  $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}$  is lineárisan összefüggők. Határozzuk meg az  $\mathbf{u}$  vektort.
- 5. Igazoljuk, hogy ha az  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$  vektorok között *pontosan* egy van, amely lineárisan függ a többi  $m - 1$ -től, akkor ez szükségképpen a nullvektor.
- 6. Igaz-e a következő állítás: Ha az  $\mathcal{A}$  lineáris leképezés  $V_1$ -ből  $V_2$ -be, és  $\mathcal{A}\mathbf{u}_1, \mathcal{A}\mathbf{u}_2, \dots, \mathcal{A}\mathbf{u}_k$  generátorrendszer  $\text{Im } \mathcal{A}$ -ban, akkor  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$  generátorrendszer  $V_1$ -ben. (Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát!)
- 7. Legyenek  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  lineárisan független vektorok! Adjuk meg a  $c$  paraméter összes olyan valós értékét, melyre  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{n-1} - \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n - c\mathbf{v}_1$  vektorok lineárisan függetlenek!
- 8. A valós számok feletti  $V$  vektortérnek egy bázisát alkotják a  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  vektorok. Legyen

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_1 &= \alpha \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{v}_1 + \alpha \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n \\ &\dots \\ \mathbf{b}_n &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha \mathbf{v}_n\end{aligned}$$

Az  $\alpha$  paraméter mely valós értékeire lesz  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$  szintén bázisa a  $V$  vektortérnek?

- 9. Mennyi lehet egy olyan mátrix rangja, amelynek minden sorában egy-egy számtani sorozat áll?
- 10. Mutassuk meg, hogy ha egy mátrixban a sorok lineárisan függetlenek, és az oszlopok is lineárisan függetlenek, akkor négyzetes mátrixról van szó.
- 11. Bizonyítsuk be, hogy egy  $k$  egyenletet és  $n$  ismeretlent tartalmazó  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  homogén lineáris egyenletrendszer összes valós megoldásai alteret alkotnak  $\mathbf{R}^n$ -ben. Mennyi az alter dimenziója, ha az  $A$  együtthatómátrix rangja  $r$ ?
- 12. Legyen az  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  egyenletrendszer egy megoldása  $\mathbf{x}'$ . Bizonyítsuk be, hogy az összes megoldást az  $\mathbf{x}' + \mathbf{x}^*$  képlettel kapjuk, ahol  $\mathbf{x}^*$  végigfut az  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  homogén egyenletrendszer összes megoldásán.