

Lineáris algebra 2004/2005 ősz
7. gyakorlat: Koordinátázás (és egy kis geometria)

1. Írjuk fel az alábbi lineáris leképezések mátrixát a megadott bázispárban! Határozzuk meg a magterület, a képterület és azok dimenzióját!

- (a) a sík α szögű elforgatása az origó körül (a bázis mindkét térben $\{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$);
- (b) a sík α szögű elforgatása az origó körül (a bázis mindkét térben $\{(1, 0)^T, (\cos \alpha, \sin \alpha)^T\}$);
- (c) a legfeljebb n -edfokú valós polinomok terén a deriválás (a bázis $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$);
- (d) $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $A: (a, b, c)^T \mapsto (a + b, 2a - c)^T$ (a standard bázisokkal);
- (e) $\mathbb{R}^2$ pontjainak merőleges vetítése egy origón átmenő α irányú szögű egyenesre;
- (f) $\mathbb{R}^3$ pontjainak $\sqrt{3}x + y = 0$ síkra való tükrözése;
- (g) $\mathbb{R}^3$ pontjainak $x - z = 0$ síkra való tükrözése
- (h) $\mathbb{R}^3$ pontjainak $\sqrt{3}x + y = 0$ síkra való tükrözése, utána a kép $x - z = 0$ síkra való tükrözése. Számoljuk ki ezt arra az esetre is, ha a leképezéseket fordított sorrendben alkalmazzuk.

2. Legyen $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ bázis V valós vektortérben. Ekkor nyilván $C = \{\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\}$ is bázis.

- (a) Ha $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_C$, akkor számoljuk ki az $[\mathbf{u}]_B$ koordinátákat.
- (b) Ha $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}_B$, akkor számoljuk ki a $[\mathbf{w}]_C$ koordinátákat.

Legyen A az a lineáris leképezés, amelyre $A\mathbf{b}_1 = 3\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$ és $A\mathbf{b}_2 = -\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$. Írjuk fel A mátrixát előbb B , utána C bázisban.

3. Legyen V az $f(x) = a + b \sin x + c \sin^2 x$ alakú függvények lineáris tere ($a, b, c \in \mathbb{R}$).

- (a) Igazoljuk, hogy $\{1, \sin x, \sin^2 x\}$ a V egy bázisa.
- (b) Bizonyítsuk be, hogy $1, \sin x, \cos 2x$ is bázisa V -nek és adjuk meg az első bázisról a másodikra való áttérés transzformációjának mátrixát.

4. Adjunk meg annak a lineáris transzformációnak a mátrixát $\mathbb{R}^3$ standard bázisában, amelyre teljesül

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 5. Van-e $V = \mathbb{R}^2$ esetén olyan $A \in \text{Hom}(V)$, amelynek két különböző bázisban a mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ illetve $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

6. Az $xy + z = 0$ felületet mibe viszi az a lineáris transzformáció, amelynek mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Forgassuk el α szöggel a standard bázis elemeit a z tengely körül. Mi lesz az $xy + z = 0$ felület egyenlete az új bázisban?

7. Hozzuk kanonikus alakra a $8y^2 + 6xy + 6x - 2y + 1 = 0$ másodrendű görbe egyenletét, ábrázoljuk a görbét és az új koordinátarendszer tengelyeit az eredeti koordinátarendszerben.