

Lineáris algebra 2004/2005 ősz

8. gyakorlat: Vektortér konstrukciók, dimenziótétel

1. Álljon V az összes nemnulla determinánsú $n \times n$ -es mátrixból és az $n \times n$ -es nullmátrixból. Bizonyítsuk be, hogy V vektortér.
2. Legyen V vektortér és $W \subseteq V$ egy részhalmaza. Bizonyítsuk be, hogy W akkor és csak akkor altér, ha minden α, β skalárra és $\mathbf{w}, \mathbf{u} \in W$ vektorra $\alpha \mathbf{w} + \beta \mathbf{u} \in W$.
3. Tegyük fel, hogy $V = \prod_{j=1}^{\infty} \mathbb{R}$ direkt szorzat, azaz V a végtelen hosszú valós számsorozatok vektortere. Tekintsük ebben a

$$B = \{(1, 0, 0, 0, \dots)^T, (0, 1, 0, 0, \dots)^T, (0, 0, 1, 0, \dots)^T, \dots\}$$

végtelen vektorrendszert. Milyen alteret generál V -ben B ?

- 4. Legyen $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg p \leq 5, \text{ és } p(1) = 0\}$. Mutassuk meg, hogy V vektortér és számoljuk ki $\dim V$ -t.
- 5. Bizonyítsuk be, hogy ha $A = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_m)$ egy $n \times m$ -es mátrix, akkor $\text{Im } A$ éppen a $\{\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_m\}$ vektorok által generált altér. Emiatt igaz, hogy $\text{rang } A = \dim \text{Im } A$.
- 6. Számítsuk ki az $\mathcal{A}: (x, y, z)^T \mapsto (x + y - 2z, x + z, 2x + y - z, -x - z)^T$ leképezés A mátrixának rangját! Hány dimenziós A magtere és képtere? Adjuk meg a $\text{Ker } \mathcal{A}$ és $\text{Im } \mathcal{A}$ egy-egy bázisát!
- 7. Hány dimenziós alteret generál az

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

vektorrendszer a $\mathbb{C}^3$ vektortérben? Adjuk meg ennek az altérnek egy bázisát, illetve válasszuk ki a fenti 5 elem közül az altér egy bázisát.

8. Legyenek W_1 és W_2 alterek V -ben, $\dim V = 40$, $\dim W_1 = 23$ és $\dim W_2 = 18$. Bizonyítsuk be, hogy $W_1 \cap W_2 \neq \{\mathbf{0}\}$
9. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}, \mathcal{B}: V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezésekre $\text{Ker } \mathcal{A} \subseteq \text{Ker } \mathcal{B}$ és $\text{Im } \mathcal{A} \subseteq \text{Im } \mathcal{B}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\text{Ker } \mathcal{A} = \text{Ker } \mathcal{B}$, és $\text{Im } \mathcal{A} = \text{Im } \mathcal{B}$.
10. Legyen $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ lineáris transzformáció egy véges dimenziós V vektortéren. Mutassuk meg, hogy vagy $V = \text{Im } \mathcal{A} \oplus \text{Ker } \mathcal{A}$ vagy vagy A^2 rangja kisebb A rangjánál, ahol A az $\mathcal{A}$ leképezés mátrixa.
- 11. Legyen $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ lineáris transzformáció egy véges dimenziós V vektortéren. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{A}$ pontosan akkor szürjektív, ha nincs olyan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ különböző vektor, amikre $\mathcal{A}\mathbf{v}_1 = \mathcal{A}\mathbf{v}_2$ fennáll.