

Lineáris algebra 2004/2005 ősz

9. gyakorlat: Az $\mathbb{R}^3$ vektortér, bilineáris függvények

1. Bizonyítsuk be, hogy a vektoriális szorzás antiszimmetrikus bilineáris függvény, azaz teljesül rá

- (a) $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$
- (b) $(\lambda \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \lambda(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
- (c) $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \times \mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{w} + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{w}$.

2. Legyen $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ az $\mathbb{R}^3$ vektortér standard bázisa. Mutassuk meg, hogy ha ebben a bázisban

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ és } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

akkor

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Írjuk fel a $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ bilineáris függvény mátrixát.

- 3. (a) Számoljuk ki a $\mathbf{v}$ irányvektorú, origón átmenő egyenesre vetítés mátrixát a skaláris szorzás segítségével.
- (b) Írjuk fel a $\mathbf{v}$ normálvektorú, origón átmenő síkra vetítés mátrixát.
- (c) Oldjuk meg az előző két feladatot vetítés helyett tükrözéssel.
- 4. Határozzuk meg az origón és a $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 1)$ pontokon átmenő sík egyenletét. Írjuk fel az erre a síkra vonatkozó tükrözés mátrixát.
- 5. Legyen a $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ bilineáris leképezés mátrixa $\mathbb{R}^3$ standard bázisában

$$(a) A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \bullet \quad (b) B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Keressünk a φ által megadott skaláris szorzásra nézve ortonormált bázist. Írjuk fel az új bázisban φ mátrixát.

- 6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy V valós vektortérben valamely $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ bilineáris függvény által definiált skaláris szorzásra $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ortonormált vektorrendszer, akkor $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ lineárisan független. Mutassuk meg, hogy ha $\dim V = n$ is teljesül, akkor $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ kvadratikus alak pozitív definit.
- 7. Adjuk meg az alábbi valós kvadratikus alakokhoz tartozó szimmetrikus bilineáris függvényeket. Határozzuk meg a jellegüket (pozitív definit, pozitív szemidefinit, stb).
- (a) $x_1^2 + x_1 x_2$
- (b) $x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2 + 4x_2 x_3 + 5x_3^2$
- 8. Adjuk meg az $\overline{x}_1 x_1 + \overline{x}_1 x_2 + 3\overline{x}_2 x_1 - 2\overline{x}_2 x_2$ komplex kvadratikus alakhoz tartozó bilineáris függvényt.
- 9. Igazoljuk, hogy egy A négyzetes mátrix pontosan akkor ortogonális (azaz $A^{-1} = A^T$), ha oszlopai ortonormált vektorrendszert alkotnak (tehát az $\mathbf{a}_i = (a_{1i}, \dots, a_{ni})$ és $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$ oszlopokra $\sum_{\ell=1}^n a_{\ell i}^2 = 1$ és $\sum_{\ell=1}^n a_{\ell i} a_{\ell j} = 0$, ha $i \neq j$).