

Lineáris algebra 2004/2005 őszi 10. gyakorlat: Sajátérték, sajátvektor

1. Bizonyítsuk be, hogy $\det A = 0$ pontosan akkor, ha A -nak 0 sajátértéke. Mutassuk meg, hogy amennyiben A invertálható, akkor A^{-1} sajátértékei éppen A sajátértékeinek reciprokai.
2. Egy F test feletti négyzetes A mátrixra $A = A^3$. Bizonyítsuk be, hogy A -nak van sajátvektora, és sajátértékei csak a $-1, 0, 1$ lehetnek.
3. Adjuk meg az alábbi komplex elemű mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait. Ha van, adjunk meg sajátvektorokból álló ortonormált bázist.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Egy valós bilineáris függvény mátrixa egy bázisban

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg a hozzá tartozó kvadratikus alak mátrixát és jellegét! Adjunk meg $\mathbb{R}^2$ -ben olyan bázist, amelyben a kvadratikus alak négyzetösszeg, és írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot.

5. Hozzuk kanonikus alakra a $8y^2 + 6xy + 6x - 2y + 1 = 0$ másodrendű görbe egyenletét, ábrázoljuk a görbét és az új koordinátarendszer tengelyeit az eredeti koordinátarendszerben.
6. Van-e az $\mathbb{R}^2$ vektortéren olyan lineáris transzformáció, amelynek nincs sajátvektora? És $\mathbb{R}^3$ -ben?
7. Legyenek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ az A lineáris transzformáció olyan sajátvektorai, amelyekhez csupa különböző sajátérték tartozik. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ lineárisan független!
8. Tegyük fel, hogy $AB = BA$ komplex elemű mátrixok. Mutassuk meg, hogy van A -nak és B -nek közös sajátvektora.