

Lineáris algebra 2004/2005 ősz
11. gyakorlat: Mátrixok hasonlósága, Jordan-féle normálalak

1. Mutassuk meg, hogy az alábbi (valós) mátrixok mind hasonlóak:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$, ahol a, b, c, d tetszőleges nemnulla számok;

(b) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix}$, ahol a, b, c, d tetszőleges nemnulla számok;

(c) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, ahol $a \neq c$ tetszőleges számok;

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) Mi az alábbi A mátrixok J Jordan-féle normálalakja?

(b) $A^{100} = ?$

(c) $e^J = ?$

(d) $e^{3A} = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \ddots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben valamely m egészre $A^m = I$, akkor A diagonalizálható.

4. Mutassuk meg, hogy előfordulhat, hogy két mátrix nem hasonló, de karakterisztikus és minimálpolinomaik megegyeznek. Mutassuk meg, hogy 3×3 -as mátrixra nincs ilyen ellenpélda.

5. Legyen $A^k = 0$ (azaz A nilpotens mátrix). Mi lehet A karakterisztikus és minimálpolinomja?

6. Van-e olyan 3×3 -as $\mathbb{Q}$ elemű mátrix, amelynek minimálpolinomja:

(a) $x^2 - 2$

(b) $x^2 + x$