

2004.jan.6. 13h
Munkaidő 90 perc,
Minden példa 20 pont

Lineáris algebra vizsgázárthelyi

Mérnök Fizikus I. évfolyamok számára

1.a) Határozzuk meg annak az $\underline{A} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixnak a $\underline{J}$ Jordan-féle normálalakját és egy olyan $\underline{C}$ reguláris mátrixot, melyre $\underline{C}^{-1}\underline{A}\underline{C} = \underline{J}$!

b)Hány lineárisan független sajátvektora van $\underline{A}$ -nak?

c)Számítsuk ki $e^{3\underline{A}}$ -t!

d)Mi lesz $e^{3\underline{A}}$ sajátértékei összege és szorzata?

Válaszait indokolja!

2.Adjuk meg annak a lineáris transzformációnak a mátrixát, amely az $(R^3, (,))$ euklideszi tér $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ vek-

torát $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorba viszi, a rá merőleges origón átmenő síkon pedig identikusan hat!

3. Legyenek $f(\underline{u}, \underline{u}) = 2u_1^2 + 2u_1u_2 + 2u_2^2$ és $g(\underline{u}, \underline{u}) = u_1^2$ R^2 -en értelmezett f, g szimmetrikus bilineáris függvényekhez tartozó kvadratikus alakok egy rögzített bázisban felírva!

a)Írjuk fel ugyanebben a bázisban az $f(\underline{u}, \underline{v})$ és $g(\underline{u}, \underline{v})$ szimmetrikus bilineáris függvényeket és azok mátrixait!

b)Mit modhatunk f és g definitéséről?

c)Határozza meg az (R^2, f) euklideszi tér egy ortonormált bázisát!

d)Írjuk fel ebben az ortonormált bázisban az $f(\underline{u}, \underline{u})$ és $g(\underline{u}, \underline{u})$ kvadratikus alakokat és ezek mátrixait!

Válaszait indokolja!

4.Bizonyítsuk be, hogy ha $\underline{A}$ $n \times n$ -es önadjungált $\underline{U}$ pedig $n \times n$ -es unitér mátrix, akkor $\underline{U}^{-1}\underline{A}\underline{U}$ szintén önadjungált mátrix!

5.Az $R \rightarrow R$ valós függvények R -feletti vektorterének tekintsük a $\cos^2(x)$, $\sin^2(x)$ és a konstans Π függvények által generált alterét!

a) Hány dimenziós ez az altér? Adjunk meg benne egy bázist!

b) Van-e ennek az altérnek egy olyan ϕ lineáris transzformációja, melyre $\phi(\cos^2(x)) = \sin^2(x)$ és $\phi(\sin^2(x)) = 0$? Ha igen, akkor adjuk meg ennek a ϕ -nek a mátrixát a fenti bázisban! Mi lesz a leképezés magtere, képtere, rangja, nullítása?