

2004. jan.23. 8h
Munkaidő 90 perc,
Minden példa 20 pont

Lineáris algebra vizsgázárthelyi

Mérnök Fizikus I. évfolyamok számára

1. Egy $\phi : R^2 \rightarrow R^2$ lineáris transzformáció az $\underline{a}_1 = -\underline{i} + \underline{j}$, $\underline{a}_2 = \underline{i} + 2\underline{j}$ vektorokat a $\underline{b}_1 = -\underline{i}$, $\underline{b}_2 = -\underline{i} + -\underline{j}$ vektorokba viszi. Egy $\psi : R^2 \rightarrow R^2$ lineáris transzformáció $\underline{a}_1$ irányban 3-szoros nyújtást végez. Mibe viszi a $\phi + \psi$ lineáris transzformáció a $3\underline{i} + 4\underline{j}$ vektort?

2.a) Határozzuk meg R^4 -ben a $\underline{v}_1 = [0, 1, 0, -1]$ vektor által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy ortonormált bázisát (a szokásos R^4 -beli skalárszorzatra nézve).

b) Írjuk fel az $[1, 2, 3, 4]$ vektor koordinátavektorát R^4 -nek abban a bázisában, amelynek elemei $\underline{v}_1$ és az a) pontban kapott bázis elemei.

3. Adott $\underline{J} \in M_8[C]$, ahol $\underline{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

a) Határozzuk meg $\underline{J}$ determinánsosztóit és invariáns faktorait!

b) Számítsuk ki $\underline{J}^{101}$ -et! Mik lesznek ennek a sajátértékei?

c) Hasonló-e $\underline{J}$ egy diagonális mátrixhoz?

Válaszát indokolja!

4. Az $f : C^2 \times C^2 \rightarrow C$ komplex bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alak az $\underline{e}_1 = \underline{i} + -\underline{j}$, $\underline{e}_2 = \underline{i} + 2\underline{j}$ bázisban $i\overline{u}_1u_2 + \overline{u}_1u_1 + \alpha\overline{u}_2u_1$.

a) Határozzuk meg az α komplex szám értékét úgy, hogy az f bilineáris függvény Hermite-féle legyen!

b) Írjuk fel az így kapott f mátrixát az $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ és az $\underline{f}_1 = i\underline{e}_1$, $\underline{f}_2 = \underline{e}_2$ bázisokban

c) Határozzuk meg a kvadratikus alak jellegét is! Válaszát indokolja!

5. a) Milyen t valós paraméterekre lesz az alábbi egyenletrendszernek végtelen sok megoldása?

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ t & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ t \\ 6 \end{pmatrix}.$$

b) Egy ilyen t értékre oldjuk meg az egyenletrendszert!

c) Adjuk meg az egyenletrendszer együtthatómátrixának sajátértékei összegét!