

Lineáris algebra

2. zárthelyi pótlása, 2004. 12. 15.

1. Legyen V valós vektortér és tegyük fel, hogy $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ bázisa. Bázist alkotnak-e V -ben a $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_1$ vektorok?
2. Írjuk fel a mátrixát a sík azon lineáris transzformációjának, amely egy $\mathbf{v}$ pontot előbb az origó körül 30° -kal elforgat, majd a kapott pontot tükrözi az $x + y = 0$ egyenesre. Határozzuk meg e mátrix inverzét is.
3. Hány dimeziós a magtere és a képtere annak a lineáris leképezésnek, amelynek valamely bázisban

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a mátrixa?

4. Írjuk fel a

$$4x^2 + 2y^2 - 2yz + z^2$$

valós kvadratikus alakhoz tartozó szimmetrikus mátrixot, legyen ez A . Bizonyítsuk be, hogy létezik az A által definiált skaláris szorzásra nézve ortonormált bázis.

5. Mutassuk meg, hogy amennyiben A $n \times n$ -es mátrixnak λ sajátértéke, akkor az $A^2 + I$ mátrixnak $\lambda^2 + 1$ sajátértéke (ahol I az $n \times n$ -es egységmátrix).