

Lineáris algebra

Vizsgázárthelyi, 2005. 01. 04.

1. Mely gyökei teljesítik a $\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z > \frac{1}{2}$ feltételt a

$$z^3 + 2z^2 + 2z + 1$$

polinomnak? Jelöljük a komplex síkon a gyököket!

2. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ és } B = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Írjuk fel az $A^{-1}B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ egyenletrendszert! Mely a értékre oldható meg Cramer-szabállyal? (Nem kell kiszámolni a megoldást.)

3. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ egy olyan bázisát, amelynek egyik eleme $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (0, 1, 1)^T$ és amely ortonormált a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrix által definiált skalárszorzásra.

4. Számítsuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrix J Jordan-féle normálalakját, és írjuk fel J^{100} mátrixot. Hány független sajátvektora van A -nak?

5. Határozzuk meg a szokásos bázisban az $\mathbb{R}^3$ -beli $(1, 1, 1)^T$ irányú egyenes körül 45° -kal forgatás mátrixát a standard bázisban. Adjuk meg a transzformáció összes valós sajátértékét.