

Lineáris algebra

Vizsgázárthelyi, 2005. 01. 25.

- Legyen A egy $n \times n$ -es komplex elemű mátrix. Igaz-e, hogy ha elemi sorműveletekkel (Gauss-elimináció) felső háromszög alakra hozzuk, akkor
 - a sorvektorok által generált $\mathbb{C}^n$ -beli altér nem változik meg;
 - a mátrix sajátértékei nem változnak meg;
 - a mátrix determinánsa nem változik meg;
 - a független oszlopvektorok maximális száma nem változik meg? Indokoljuk a válaszokat!
- Legyen A egy $n \times n$ -es mátrix, melyre $i = 1, \dots, n-1$ esetén $a_{i,i+1} = 1$, a mátrix többi eleme 0.
 - Rajzoljuk fel a mátrixot.
 - Adjuk meg, hogy a mátrix által meghatározott lineáris transzformáció hova viszi a standard bázis elemeit.
 - Határozzuk meg a mátrix karakterisztikus és minimálpolinomját, sajátértékeit és sajátvektorait.
 - Adjuk meg e^{3A} mátrixot.
- Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ egy bilineáris függvény mátrixa.
 - Adjuk meg a hozzá tartozó kvadratikus alakot valamint annak jellegét is.
 - Írjuk fel a kvadratikus alak mátrixát ugyanebben a bázisban.
 - Írjuk fel a kvadratikus alak mátrixát egy olyan bázisban, amely az eredeti bázisvektorok kétszereseiből áll.
- Legyen $W = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z = 0\}$.
 - Adjunk meg egy olyan lineáris leképezést, amelynek W magtere.
 - Mutassuk meg hogy W altere $\mathbb{R}^4$ -nek. Mennyi W dimenziója?
 - Adjunk meg W -ben egy bázist.
 - Adjunk meg W -ben egy ortonormált bázist.
- Írjuk fel azt az 1 főegyütthatós legalacsonyabb fokú valós együtthatós polinomot, amelynek i kétszeres, 2 háromszoros, 5 egyszeres gyöke.
 - Adjunk meg egy olyan komplex elemű mátrixot, amelynek ez karakterisztikus polinomja.
 - Adjunk meg egy olyan valós elemű mátrixot, amelynek ez karakterisztikus polinomja.
 - Van-e ilyen szimmetrikus mátrix is?